ALGEBRĂ LINIARĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI DIFERENŢIALĂ

– Culegere de probleme –

Emil STOICA şi Mircea NEAGU

Cuprins

Capitolul 1

Spaţii vectoriale. Spaţii euclidiene

1.1 Elemente teoretice fundamentale

Definiţia 1.1.1 *Se numeşte* ***spaţiu vectorial*** *o mulţime nevidă V pe care avem definite două legi de compoziţie, una internă notată*

$$" + " : V \times V \to V, \quad (x, y) \to x + y$$

şi cealaltă externă notată

$$" \cdot " : K \times V \to V, \quad (\alpha, x) \to \alpha x,$$

unde $K-$ câmp (corp comutativ), pentru care avem îndeplinite proprietăţile:

1. *$(V, +)$ este un grup abelian*

2. $$\begin{cases} \alpha\,(x+y) = \alpha x + \alpha y, & \forall\ \alpha,\beta \in K, \quad \forall\ x,y \in V \\ (\alpha+\beta)\,x = \alpha x + \beta y, & \forall\ \alpha,\beta \in K, \quad \forall\ x \in V \\ \alpha\,(\beta x) = (\alpha\beta)\,x, & \forall\ \alpha,\beta \in K, \quad \forall\ x \in V \\ 1 \cdot x = x, & \forall\ x \in V. \end{cases}$$

Elementele mulţimii V se numesc *vectori*, elementele câmpului K vor fi numite *scalari*, iar legea de compoziţie externă va fi numită *înmulţirea cu scalari*. Pentru $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$ vom spune că V este un *spaţiu vectorial real*, respectiv *spaţiu vectorial complex.*

Definiţia 1.1.2 *O submulţime nevidă $U \subset V$ se numeşte* ***subspaţiu vectorial*** *al K-spaţiului vectorial V dacă*

1. $\forall\ x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$
2. $\forall\ \alpha \in K, \forall\ x \in U \Rightarrow \alpha x \in U.$

Teorema 1.1.1 *O submulţime $U \subset V$ este un subspaţiu vectorial dacă şi numai dacă*

$$\forall\ x, y \in U,\ \forall\ \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha x + \beta y \in U.$$

Propoziţia 1.1.2 *Dacă V_1 şi V_2 sunt două subspaţii vectoriale în K-spaţiul vectorial V, atunci submulţimile:*

$$V_1 \cap V_2 \text{ şi } V_1 + V_2 = \{v \in V \mid v = v_1 + v_2,\ v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$$

sunt subspaţii vectoriale.

Propoziţia 1.1.3 *Dacă $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, atunci descompunerea $v = v_1 + v_2$ este unică iar suma $V_1 + V_2$ va fi numită* ***sumă directă*** *şi va fi notată cu $V_1 \oplus V_2$. În plus, dacă $V_1 \oplus V_2 = V$, atunci V_1 şi V_2 se numesc* ***subspaţii suplementare****.*

Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o submulţime de vectori a unui spaţiu vectorial V peste câmpul K. Mulţimea

$$L(B) = \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n \mid \alpha_i \in K,\ \forall\ i = \overline{1, n}\}$$

se numeşte *acoperirea liniară* a mulţimii B sau *spaţiul vectorial generat de submulţimea* B. Este de notat faptul că $L(B)$ reprezintă un subspaţiu vectorial al lui V.

Definiţia 1.1.3 *Mulţimea B se numeşte* ***sistem de generatori*** *pentru spaţiul vectorial V dacă $L(B) = V$.*

Astfel, mulţimea de vectori B este un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial V dacă

$$\forall\ v \in V,\quad \exists\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K \quad \text{astfel încât} \quad v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n.$$

Definiţia 1.1.4 *Mulţimea B se numeşte* ***liniar independentă*** *dacă egalitatea*

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = 0_V$$

are loc numai pentru $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. În caz contrar, spunem că B este un sistem de vectori ***liniar dependent****.*

Definiţia 1.1.5 *Se numeşte* ***bază*** *a spaţiului vectorial V, un sistem de vectori B care satisface condiţiile:*

1. *B este liniar independentă;*
2. *B este un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial V.*

Deoarece se poate demonstra că numărul de elemente al oricărei baze B a unui acelaşi spaţiu vectorial V este acelaşi, se notează cu $\dim_K V = n$ numărul elementelor dintr-o bază oarecare. Acest număr se numeşte *dimensiunea* peste K a spaţiului vectorial V.

Teorema 1.1.4 (Grassmann) *Dacă W_1 şi W_2 sunt două subspaţii vectoriale ale unui spaţiu vectorial V, atunci este adevărată egalitatea*

$$\dim_K(W_1 + W_2) = \dim_K W_1 + \dim_K W_2 - \dim_K W_1 \cap W_2.$$

În particular, avem: $\dim_K W_1 \oplus W_2 = \dim_K W_1 + \dim_K W_2$.

Dacă $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este o bază a unui spaţiu vectorial V, atunci

$$\forall\ v \in V, \quad \exists!\ x_1, x_2, ..., x_n \in K \quad \text{astfel încât} \quad v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n.$$

Definiţia 1.1.6 *Matricea $(x_1, x_2, ..., x_n) \in M_{1,n}(K)$ reprezintă* ***coordonatele*** *vectorului v în baza B.*

Fie $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ o altă bază în V. Atunci, avem descompunerile unice

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}e_j,\ \forall\ i = \overline{1, n}.$$

Definiţia 1.1.7 *Matricea $M_{BB'} \overset{not}{=} C = (c_{ji})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K)$ (în care sunt puse pe coloane coordonatele vectorilor e'_i în baza B) se numeşte* ***matricea de trecere de la baza*** *B* ***la baza*** *B'.*

Fie $v \in V$ un vector arbitrar şi fie

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \text{ şi } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix}$$

coordonatele vectorului v în bazele B şi B'.

Propoziţia 1.1.5 *Legătura între X şi X' este dată de relaţia matricească*

$$X = C \cdot X'.$$

Propoziţia 1.1.6 *Fie $B = \{e_1, e_2, ...e_n\}$ o bază în spaţiul vectorial V, şi fie sistemul de vectori*

$$S = \{v_1, v_2, ..., v_p\} \subset V, \qquad v_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_j, \qquad i = \overline{1, p}.$$

Atunci, numărul maxim de vectori liniar independenţi ai sistemului S este dat de rangul matricii C.

Observaţia 1.1.7 *În $\mathbb{R}^n$, rangul matricii coordonatelor unui sistem de vectori exprimă numărul maxim al vectorilor liniar independenţi.*

Observaţia 1.1.8 *În $\mathbb{R}^3$, trei vectori sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă determinantul matricii determinate de cei trei vectori este nenul.*

Să considerăm acum V ca fiind un spaţiu vectorial real.

Definiţia 1.1.8 *O aplicaţie $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, având proprietăţile:*

(i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle\,, \quad \forall\ x, y \in V;$

(ii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle\,, \quad \forall\ \alpha \in K, \quad \forall\ x, y \in V;$

(iii) $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle\,, \quad \forall\ x, x', y \in V;$

(iv) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall\ x \in V$, *cu egalitate dacă şi numai dacă* $x = 0$,

se numeşte ***produs scalar*** *pe spaţiul vectorial real V.*

O pereche $(V, \langle , \rangle)$, reprezentând un spaţiu vectorial real înzestrat cu un produs scalar, se numeşte *spaţiu vectorial euclidian.*

Teorema 1.1.9 *Într-un spaţiu vectorial euclidian $(V, \langle , \rangle)$ are loc* ***inegalitatea Cauchy-Schwarz***

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle\,,$$

egalitatea având loc dacă şi numai dacă vectorii x şi y sunt liniar independenţi.

Noţiunea de spaţiu euclidian este extrem de importantă în algebra liniară, deoarece permite introducerea noţiunilor de *lungime* (n*ormă*) a unui vector

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

distanţă

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

şi *unghi* $\varphi \in [0,\pi]$ format de doi vectori x şi y:

$$\cos\varphi = \frac{\langle x,y\rangle}{||x||\cdot||y||}.$$

Evident, din definiţia unghiului dintre doi vectori, rezultă că într-un spaţiu euclidian doi vectori nenuli x şi y sunt *perpendiculari* (*ortogonali*) $x \perp y$ dacă şi numai dacă $\langle x,y\rangle = 0$.

Definiţia 1.1.9 *Să considerăm* $(V, \langle,\rangle)$ *un spaţiu euclidian de dimensiune* $\dim_K V = n$ *şi fie* $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *o bază a lui* V*. Baza* B *se numeşte* ***bază ortonormată*** *a lui* V *dacă sunt îndeplinite condiţiile*

$$\langle e_i, e_j\rangle = 0, \quad \forall\ i \neq j = \overline{1,n}$$

şi

$$||e_i|| = 1, \quad \forall\ i = \overline{1,n}.$$

Sintetizând, vectorii unei baze ortonormate sunt unitari şi ortogonali doi câte doi. Am dori să menţionăm că bazele ortonormate sunt cele mai convenabile pentru descrierea proprietăţilor algebrice şi geometrice ale spaţiilor euclidiene.

Teorema 1.1.10 (de existenţă a bazelor ortonormate) *Fie* $(V, \langle,\rangle)$ *un spaţiu vectorial euclidian* n*-dimensional. Dacă*

$$B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

este o bază oarecare a lui V*, atunci există o bază ortonormată*

$$B' = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

a spaţiului euclidian V*,* ***obţinută din baza*** B*.*

Construcţia bazei ortonormate B' din baza oarecare B este dată de

Procedeul de ortonormalizare Gramm-Schmidt

(1) Construim vectorii ortogonali

$$f_1 = v_1,$$

$$f_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, f_1\rangle}{||f_1||^2} f_1,$$

$$f_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, f_1\rangle}{||f_1||^2} f_1 - \frac{\langle v_3, f_2\rangle}{||f_2||^2} f_2,$$

$$\vdots$$

$$f_i = v_i - \frac{\langle v_i, f_1\rangle}{||f_1||^2} f_1 - \frac{\langle v_i, f_2\rangle}{||f_2||^2} f_2 - ... - \frac{\langle v_i, f_{i-1}\rangle}{||f_{i-1}||^2} f_{i-1},$$

$$\vdots$$

$$f_n = v_n - \frac{\langle v_n, f_1\rangle}{||f_1||^2} f_1 - \frac{\langle v_n, f_2\rangle}{||f_2||^2} f_2 - ... - \frac{\langle v_n, f_{n-1}\rangle}{||f_{n-1}||^2} f_{n-1}.$$

(2) Vectorii din baza ortonormată $B' = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sunt

$$e_i = \frac{1}{||f_i||} \cdot f_i, \ \forall\ i = \overline{1, n}.$$

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spaţiu euclidian şi fie W un subspaţiu vectorial al lui V.

Definiţia 1.1.10 *Mulţimea*

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid v \perp w, \quad \forall\ w \in W\}$$

este un subspaţiu vectorial al lui V şi se numeşte ***complementul ortogonal*** *al lui W.*

Observaţia 1.1.11 *Întotdeauna avem descompunerea* $V = W \oplus W^{\perp}$.

1.2 Probleme rezolvate

Problema 1.2.1 *Fie* $(V, +, \cdot)$ *un spaţiu vectorial real. Pe produsul cartezian* $V^{\mathbb{C}} = V \times V$ *definim operaţiile de adunare a vectorilor şi de înmulţire a lor cu scalari complecşi:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x), \quad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ i^2 = -1.$$

*Să se arate că, în raport cu aceste operaţii $V^{\mathbb{C}}$ este spaţiu vectorial complex (acest spaţiu poartă numele de **complexificatul** lui V).*

Rezolvare. Se ştie că produsul cartezian $(V \times V, +)$ este un grup abelian cu elementul neutru $(0_V, 0_V)$, opusul unui vector (x, y) fiind vectorul $(-x, -y)$. Fie $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ doi scalari complecşi. În acest context, avem

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2)(x, y) &= ((\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2))(x, y)\\ &= ((\alpha_1 + \alpha_2)x - (\beta_1 + \beta_2)y, (\alpha_1 + \alpha_2)y + (\beta_1 + \beta_2)x)\\ &= (\alpha_1 x - \beta_1 y, \alpha_1 y + \beta_1 x) + (\alpha_2 x - \beta_2 y, \alpha_2 y + \beta_2 x)\\ &= z_1(x, y) + z_2(x, y).\end{aligned}$$

Fie acum $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ şi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \times V$. Atunci

$$\begin{aligned}z((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= (\alpha + i\beta)(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ &= (\alpha(x_1 + x_2) - \beta(y_1 + y_2), \alpha(y_1 + y_2) + \beta(x_1 + x_2))\\ &= (\alpha x_2 - \beta y_2, \alpha y_2 + \beta x_2) + (\alpha x_2 - \beta y_2, \alpha y_2 + \beta x_2)\\ &= z(x_1, y_1) + z(x_2, y_2).\end{aligned}$$

În mod asemănător, se arată că $(z_1 \cdot z_2)(x, y) = z_1(z_2(x, y))$ şi $(1 + 0i)(x, y) = (x, y)$. În concluzie, mulţimea $V^{\mathbb{C}}$ este un spaţiu vectorial complex. ■

Problema 1.2.2 *Fie $\mathcal{F}_{[a,b]}$ mulţimea tuturor funcţiilor reale definite pe intervalul $[a, b] \subset \mathbb{R}$.*

a) Să se arate că operaţiile:

$$\begin{aligned}&(f + g)(x) = f(x) + g(x), && \forall x \in [a, b]\\ &(\alpha f)(x) = \alpha f(x), && \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in [a, b]\end{aligned}$$

definesc o structură de $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial pe mulţimea $\mathcal{F}_{[a,b]}$.

b) Dacă intervalul $[a, b] \subset \mathbb{R}$ este simetric faţă de origine, să se arate că

$$\begin{aligned}F_+ &= \left\{f \in \mathcal{F}_{[a,b]} \mid f(-x) = f(x)\right\} \subset \mathcal{F}_{[a,b]} \text{ (funcţiile pare),}\\ F_- &= \left\{f \in \mathcal{F}_{[a,b]} \mid f(-x) = -f(x)\right\} \subset \mathcal{F}_{[a,b]} \text{ (funcţiile impare)}\end{aligned}$$

sunt subspaţii vectoriale şi, mai mult, avem egalitatea $\mathcal{F}_{[a,b]} = F_+ \oplus F_-$.

Rezolvare. a) Se cunoaşte că $\left(\mathcal{F}_{[a,b]}, +\right)$este un grup abelian cu elementul neutru $\mathbb{O}$ (unde $\mathbb{O} : [a, b] \to \mathbb{R}$ este funcţia identic nulă). În plus, avem adevărate relaţiile:

$$((\alpha + \beta) f)(x) = (\alpha + \beta) f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x),$$

$$(\alpha (f + g))(x) = (\alpha f + \alpha g)(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x), \quad \forall\, x \in [a, b].$$

De asemenea, avem

$$((\alpha\beta) f)(x) = (\alpha\beta) f(x) = \alpha (\beta f(x)) = (\alpha (\beta f))(x), \forall\, x \in [a, b],$$

adică $(\alpha\beta) f = \alpha (\beta f)$. Mai mult, $1 \cdot f = f$, $\forall\, f \in \mathcal{F}_{[a,b]}$. În concluzie, mulţimea $\mathcal{F}_{[a,b]}$ este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial.

b) Este uşor de demonstrat că, în cazul în care intervalul $[a, b] \subset R$ este simetric faţă de origine, suma a două funcţii pare/impare este tot o funcţie pară/impară şi, mai mult, că înmulţirea cu un scalar real a unei funcţii pare/impare este, la rândul ei, tot o funcţie pară/impară. Prin urmare, conform criteriului de subspaţiu, rezultă că F_+ şi F_- sunt subspaţii în $\mathcal{F}_{[a,b]}$. Mai rămâne de demonstrat că $\mathcal{F}_{[a,b]} = F_+ \oplus F_-$. Pentru aceasta este suficient de demonstrat că $F_+ \cap F_- = \{\mathbb{O}\}$ şi $F_+ + F_- = \mathcal{F}_{[a,b]}$. Cu alte cuvinte, trebuie demonstrat că orice element $f \in \mathcal{F}_{[a,b]}$ se poate scrie unic sub forma

$$f = f_+ + f_-,$$

unde $f_+ \in F_+$, $f_- \in F_-$. În această direcţie, să considerăm $f \in \mathcal{F}_{[a,b]}$ o funcţie arbitrară şi să construim funcţiile

$$f_+(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right],$$

$$f_-(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - f(-x)\right].$$

Se verifică uşor că $f_+ \in F_+$, $f_- \in F_-$ şi, mai mult, că este adevărată relaţia $f = f_+ + f_-$. Pentru a demonstra unicitatea descompunerii anterioare, să considerăm un element arbitrar $f \in F_+ \cap F_-$. Atunci, pentru orice $x \in [a, b]$, au loc simultan relaţiile: $f(-x) = f(x)$ şi $f(-x) = -f(x)$. Acest lucru implică $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$, adică $f = \mathbb{O}$. ■

Problema 1.2.3 *Să se arate că submulţimile de matrici*

$$\mathbf{S} = \left\{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid {}^T A = A\right\} \text{ (matricile simetrice),}$$
$$\mathbf{A} = \left\{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid {}^T A = -A\right\} \text{ (matricile antisimetrice)}$$

sunt subspaţii vectoriale în $\mathcal{M}_n(K)$ *şi, mai mult, avem* $\mathcal{M}_n(K) = \mathbf{S} \oplus \mathbf{A}$.

Rezolvare. Din relaţiile ${}^{T}(A+B) = {}^{T}A + {}^{T}B$ şi ${}^{T}(\alpha A) = \alpha\, {}^{T}A$, cu ajutorul criteriului de subspaţiu, rezultă că $\mathbf{S}$ şi $\mathbf{A}$ sunt subspaţii ale lui $\mathcal{M}_n(K)$ .Să luăm acum o matrice arbitrară A din intersecţia $\mathbf{S} \cap \mathbf{A}$. Atunci, din relaţiile ${}^{T}A = A$ şi ${}^{T}A = -A$, rezultă că $A = \mathbb{O}$ (matricea nulă). În concluzie, intersecţia $\mathbf{S} \cap \mathbf{A}$ este subspaţiul nul. Mai mult, pentru o matrice oarecare $B \in \mathcal{M}_n(K)$, să considerăm matricile

$$B_+ = \frac{1}{2}\left(B + {}^{T}B\right),$$
$$B_- = \frac{1}{2}\left(B - {}^{T}B\right).$$

Evident avem $B_+ \in \mathbf{S}, B_- \in \mathbf{A}$ şi $B = B_+ + B_-$. Prin urmare am demonstrat că $\mathcal{M}_n(K) = \mathbf{S} \oplus \mathbf{A}$. ■

Problema 1.2.4 *Să se stabilească dependenţa sau independenţa liniară a următoarelor sisteme de vectori şi să se precizeze dacă sunt sisteme de generatori, în spaţiile vectoriale respective:*

a) $S_1 = \{v_1 = (1,3), v_2 = (-2,1)\} \subset \mathbb{R}^2$;

b) $S_2 = \{v_1 = (1,3,-2), v_2 = (-2,1,0), v_3 = (0,5,-4)\} \subset \mathbb{R}^3$;

c) $S_3 = \left\{v_1 = 1, v_2 = \cos^2 x, v_3 = \cos 2x\right\} \subset C^0(\mathbb{R})$.

Rezolvare. a) Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$. Rezultă sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0, \end{cases}$$

al cărui determinant este nenul, adică sistemul admite numai soluţia banală. Cu alte cuvinte, sistemul de vectori S_1 este liniar independent în $\mathbb{R}^2$. Pentru a studia dacă sistemul de vectori S_1 este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^2$, să considerăm un vector arbitrar $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ şi să studiem dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha v_1 + \beta v_2 = v$. Rezultă sistemul liniar neomeogen

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = x \\ 3\alpha + \beta = y. \end{cases}$$

Deoarece determinantul sistemului este nenul rezultă că sistemul are soluţie unică pentru $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$. În concluzie, sistemul de vectori S_1 este şi un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^2$, adică este o bază în $\mathbb{R}^2$.

b) Determinantul obţinut prin scrierea pe coloană a vectorilor v_1, v_2 şi v_3 este

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -8.$$

Determinantul fiind nenul, rezultă că sistemul de vectori S_2 este o bază în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$.

c) Se ştie din trigonometrie că $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Cu alte cuvinte avem $v_3 = 2v_2 - v_1$, adică sistemul de vectori S_3 este liniar dependent în $C^0(\mathbb{R})$. Să presupunem că sistemul de vectori S_3 este sistem de generatori pentru $C^0(\mathbb{R})$. În această situaţie, orice funcţie continuă se scrie ca o combinaţie liniară de v_1, v_2 şi v_3. În particular, pentru funcţia $\cos x$ există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. astfel încât

$$\cos x = \alpha + \beta \cos^2 x + \gamma \cos 2x, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Luând în egalitatea anterioară $x = \pi$, rezultă că $\alpha + \beta + \gamma = -1$. Pentru $x = 0$ găsim însă $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Contradicţie! Prin urmare, sistemul de vectori S_3 nu este un sistem de generatori pentru $C^0(\mathbb{R})$. ■

Problema 1.2.5 *Să se calculeze coordonatele vectorilor următori în bazele precizate:*

a) $v = (1, 1, 1)$, *unde*

$$B = \{e_1 = (2, 2, -1), e_2 = (2, -1, 2), e_3 = (-1, 2, 2)\} \subset \mathbb{R}^3;$$

b) $v = X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1$, *unde*

$$B = \{1, 1 + X, 1 + X^2, 1 + X^4, 1 + X^5, 1 - X^3\} \subset \mathbb{R}_5[X].$$

Rezolvare. a) Fie $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ coordonatele vectorului v în baza B. Rezultă egalitatea $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ din care găsim sistemul liniar

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta - \gamma = 1 \\ 2\alpha - \beta + 2\gamma = 1 \\ -\alpha + 2\beta + 2\gamma = 1. \end{cases}$$

În concluzie, deducem că $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$.

b) Să presupunem că $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu) \in \mathbb{R}^6$ sunt coordonatele polinomului v în baza B. Deducem că

$$v = \alpha + \beta(1 + X) + \gamma(1 + X^2) + \delta(1 + X^4) + \varepsilon(1 + X^5) + \mu(1 - X^3).$$

Egalând coeficienţii celor două polinoame, găsim $\alpha = -2$, $\beta = \varepsilon = \mu = 1$ şi $\delta = \gamma = -1$. În concluzie, coordonatele polinomului v în baza B sunt exprimate de vectorul $(0, 1, -1, -1, 1, -1)$. ■

Problema 1.2.6 *Să se arate că vectorii* $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, *unde* $x = (-1, 1, 1)$, $y = (1, 1, 1)$, $z = (1, 3, 3)$, *sunt liniar dependenţi şi să se găsească relaţia de dependenţă liniară.*

Rezolvare. Deoarece determinantul format prin scrierea pe coloană a vectorilor x, y şi z este nul, rezultă că vectorii x, y, z sunt liniar dependenţi. Să presupunem că avem următoarea relaţie de dependenţă liniară vectorială: $z = \alpha x + \beta y$, unde α, $\beta \in \mathbb{R}$. Această relaţie conduce la sistemul liniar

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 3, \end{cases}$$

care admite soluţia $\alpha = 1$, $\beta = 2$. În concluzie, avem $z = x + 2y$. ■

Problema 1.2.7 *Fie* v_1, v_2 *şi* v_3 *trei vectori liniar independenţi în spaţiul vetorial real* V*. Să se determine* $\alpha \in \mathbb{R}$ *astfel încât vectorii* $u_1 = v_1 + \alpha v_2$, $u_2 = v_2 + \alpha v_3$ *şi* $u_3 = v_3 + \alpha v_1$ *să fie liniar independenţi (respectiv liniar dependenţi).*

Rezolvare. Pentru ca vectorii u_1, u_2 şi u_3 să fie liniar independenţi trebuie ca pentru orice scalari $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ care verifică egalitatea $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 = 0_V$ să rezulte că $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. Dar, din egalitatea

$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 = 0_V \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 (v_1 + \alpha v_2) + \beta_2 (v_2 + \alpha v_3) + \beta_3 (v_3 + \alpha v_1) = 0_V \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\beta_1 + \beta_3 \alpha) v_1 + (\beta_2 + \beta_1 \alpha) v_2 + (\beta_3 + \beta_2 \alpha) v_3 = 0_V,$$

precum şi din liniara independenţă a vectorilor v_1, v_2, v_3, deducem că

$$\begin{cases} \beta_1 & + & & & \alpha\beta_3 & = & 0 \\ \alpha\beta_1 & + & \beta_2 & & & = & 0 \\ & & \alpha\beta_2 & + & \beta_3 & = & 0. \end{cases}$$

Prin urmare, condiţia ca vectorii u_1, u_2, u_3 să fie liniar independenţi devine echivalentă cu aceea ca determinantul sistemului de mai sus să fie nenul. Acest fapt conduce la condiţia $\alpha \neq -1$. Evident, pentru $\alpha = -1$ vectorii u_1, u_2 şi u_3 sunt liniar dependenţi. ■

Problema 1.2.8 *Să se determine suma şi intersecţia subspaţiilor vectoriale* $U, V \subset \mathbb{R}^3$, *unde*

$$U = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0\right\};$$
$$V = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

Rezolvare. Subspaţiul intersecţie $U \cap V$ este determinat de mulţimea soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

care admite soluţiile $x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = -\alpha$, unde $a \in \mathbb{R}$. Prin urmare, avem $U \cap V = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Subspaţiul sumă este $U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$. Folosind notaţiile $u = (u_1, u_2, u_3)$ şi $v = (v_1, v_2, v_3)$, problema determinării sumei de subspaţii $U + V$ revine la aceea a determinării valorilor parametrilor λ, μ, $\nu \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = 0 \\ 2v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ u_1 + v_1 = \lambda \\ u_2 + v_2 = \mu \\ u_3 + v_3 = \nu \end{cases}$$

este compatibil. Deoarece sistemul precedent este compatibil pentru $\forall\ \lambda$, μ şi $\nu \in \mathbb{R}$, rezultă că avem $U + V = \mathbb{R}^3$. Suma subspaţiilor nu este directă deoarece $U \cap V \neq \{(0,0,0)\}$ ■

Problema 1.2.9 *Fie subspaţiul vectorial* $W_1 \subset \mathbb{R}^3$, *care este generat de vectorii* $w_1 = (1, -1, 0)$ *şi* $w_2 = (-1, 1, 2)$. *Să se determine subspaţiul suplementar* W_2 *şi să se descompună vectorul* $x = (2, 2, 2)$ *pe cele două subspaţii.*

Rezolvare. Deoarece sistemul de vectori $\{w_1, w_2\}$ este liniar independent şi $W_1 = L(\{w_1, w_2\})$ rezultă că $\{w_1, w_2\}$ este o bază în W_1, adică $\dim_{\mathbb{R}} W_1 = 2$. Fie W_2 complementul ortogonal al subspaţiului W_1. Din teorema lui Grassmann deducem că $\dim_{\mathbb{R}} W_2 = 1$. Să considerăm că $w_3 = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ este o bază în $W_2 = L(\{w_3\})$. Din condiţiile de ortogonalitate $w_3 \perp w_1$ şi $w_3 \perp w_2$ deducem că $x = y$ şi $z = 0$. Cu alte cuvinte, avem

$$W_2 = \{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = L(\{w_3 = (1, 1, 0)\}).$$

Vectorul $x = (2, 2, 2)$ se descompune în $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ după formula

$$x = aw_1 + bw_2 + cw_3, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Prin calcul, găsim $a = b = 1$ şi $c = 2$. În concluzie, avem următoarele proiecţii vectoriale: $pr_{W_1}x = w_1 + w_2$ şi $pr_{W_2}x = 2w_3$. ■

Problema 1.2.10 *În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideră sistemele de vectori*

$$\mathcal{B}' = \{e_1' = (1, 1, 0), e_2' = (1, 0, 1), e_3' = (1, 0, -1)\},$$
$$\mathcal{B}'' = \{e_1'' = (1, 0, 0), e_2'' = (1, 1, 0), e_3'' = (1, 1, 1)\}.$$

Să se arate că $\mathcal{B}'$ şi $\mathcal{B}''$ sunt baze şi să se detemine matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}'$ la baza $\mathcal{B}''$. Să se calculeze coordonatele vectorului $v \in \mathbb{R}^3$ în raport cu cele două baze ştiind că $(2, -1, 1)$ sunt coordonatele sale exprimate în baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare. Sistemele de vectori $\mathcal{B}'$ şi $\mathcal{B}''$ sunt baze în $\mathbb{R}^3$ deoarece determinanţii formaţi prin scrierea pe coloană a vectorilor din sistemele respective sunt nenuli. Pentru a determina matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}'$ la baza $\mathcal{B}''$, descompunem vectorii e_i'', $\forall\, i = \overline{1,3}$, după vectorii bazei $\mathcal{B}'$. Pentru vectorul e_1'' avem $e_1'' = c_{11}e_1' + c_{12}e_2' + c_{13}e_3'$, $c_{11}, c_{12}, c_{13} \in \mathbb{R}$. Prin calcul, deducem că

$$\begin{cases} c_{11} + c_{12} + c_{13} = 1 \\ c_{11} = 0 \\ c_{12} - c_{13} = 0, \end{cases}$$

adică $c_{11} = 0$ şi $c_{12} = c_{13} = 1/2$. În mod asemănător, deducem că

$$e_2'' = c_{21}e_1' + c_{22}e_2' + c_{23}e_3' \Rightarrow c_{21} = 1,\ c_{22} = c_{23} = 0,$$
$$e_3'' = c_{31}e_1' + c_{32}e_2' + c_{33}e_3' \Rightarrow c_{31} = 1,\ c_{32} = -c_{33} = 1/2.$$

În concluzie, matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}'$ la baza $\mathcal{B}''$ este $C = (c_{ji})_{i,j=\overline{1,3}}$, adică

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} = C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Coordonatele vectorului v în baza $\mathcal{B}'$ se pot obţine direct, descompunând pe v după vectorii bazei $\mathcal{B}'$. Cu alte cuvinte, considerând că $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ sunt coordonatele lui v în baza $\mathcal{B}'$, avem

$$v = (2, -1, 1) = \alpha e_1' + \beta e_2' + \gamma e_3'.$$

În urma calculelor, găsim $\alpha = -1$, $\beta = 2$ şi $\gamma = 1$. Analog, descompunând vectorul v după vectorii bazei $\mathcal{B}''$, găsim că $x'' = (3, -2, 1)$ sunt coordonatele vectorului v în baza $\mathcal{B}''$.

Observaţie. Problema se poate rezolva şi utilizând formula de schimbare de coordonate: $B' = \Omega \cdot B^\circ$ şi $B'' = \Lambda \cdot B^\circ$ implică $B'' = \left(\Lambda \cdot \Omega^{-1}\right) \cdot B'$, adică $X' = ^t \left(\Lambda \cdot \Omega^{-1}\right) \cdot X''$. ■

Problema 1.2.11 *Să se arate că pe mulţimea polinoamelor de grad cel mult n, notată cu $\mathbb{R}_n[X]$ operaţia definită prin*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i,$$

unde $f = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ şi $g = b_0 + b_1 X + ... + b_n X^n$ este un produs scalar. În raport cu acest produs scalar, să se calculeze lungimea $\|f\|$ şi distanţa $\delta(f, g)$, unde $f = 1 + X + 2X^2 - 6X^3$ şi $g = 1 - X - 2X^2 + 6X^3$.

Rezolvare. În mod evident, avem comutativitatea $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$. Fie polinoamele arbitrare $f_1 = a_0^1 + a_1^1 X + ... + a_n^1 X^n$ şi $f_2 = a_0^2 + a_1^2 X + ... + a_n^2 X^n$. Avem

$$\langle f_1 + f_2, g\rangle = \sum_{i=0}^{n} (a_i^1 + a_i^2) b_i = \sum_{i=0}^{n} a_i^1 b_i + \sum_{i=0}^{n} a_i^2 b_i = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle.$$

Mai mult, pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ un număr real arbitrar, deducem că

$$\langle \alpha f, g\rangle = \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i) b_i = \alpha \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_i\right) = \alpha \langle f, g\rangle.$$

Pozitiv definirea este asigurată de faptul că

$$\langle f, f\rangle = \sum_{i=0}^{n} (a_i)^2 \geq 0, \ \forall \ f \in \mathbb{R}_n[X],$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$, adică $f = 0$. În concluzie, operaţia considerată este un produs scalar pe $\mathbb{R}_n[X]$.

Pentru $f = 1 + X + 2X^2 - 6X^3$ avem $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{42}$. Mai mult, găsim $\delta(f, g) = \|f - g\| = 2\sqrt{41}$. ■

Problema 1.2.12 *Fie vectorii $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Folosind produsul scalar uzual al spaţiului aritmetic $\mathbb{R}^n$, să se demonstreze următoarele inegalităţi:*

a) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)$;

b) $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}$.

Rezolvare. a) Se scrie **inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz** $\langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$ de pe spaţii euclidiene în cazul particular al produsului scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$. Deducem ceea ce trebuia demonstrat.

b) Se scrie inegalitatea triunghiului $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ de pe spaţii euclidiene în cazul particular al produsului scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$. Găsim rezultatul cerut.

Observaţie. Demonstraţia inegalităţii triunghiului este descrisă mai jos:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \leq \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

■

Problema 1.2.13 *Să se ortonormeze sistemele de vectori:*

a) $v_1 = (1, -2, 2)$, $v_2 = (-2, 1, 2)$, $v_3 = (5, 3, 5)$ *în raport cu produsul scalar uzual de pe* $\mathbb{R}^3$;

b) $v_1 = 1$, $v_2 = X$, $v_3 = X^2$ *în raport cu produsul scalar de pe spaţiul polinoamelor de grad cel mult doi* $\mathbb{R}_2[X]$, *definit prin*

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx, \quad \forall\ f, g \in \mathbb{R}_2[X].$$

Rezolvare. a) Utilizând procedeul Gramm-Schmidt, construim versorul

$$e_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

În continuare, construim vectorii ortogonali f_2, f_3 şi îi ortonormăm:

$$f_2 = v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1 = (-2, 1, 2) \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\|f_2\|} f_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$f_3 = v_3 - \langle v_3, e_1\rangle e_1 - \langle v_3, e_2\rangle e_2 = v_3 - 3e_1 - e_2 = \left(\frac{14}{3}, \frac{14}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

Ortonormând vectorul f_3, găsim baza ortonormată $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$, unde

$$e_3 = \frac{1}{\|f_3\|} f_3 = \frac{1}{21}(14, 14, 7) = \frac{1}{3}(2, 2, 1).$$

b) Avem $e_1 = v_1/||v_1|| = 1/\sqrt{2}$. Construim vectorii ortogonali f_2, f_3 şi îi ortonormăm:

$$f_2 = v_2 - (v_2, e_1)\, e_1 = X - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x dx = X \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\|f_2\|} f_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} X,$$

$$f_3 = v_3 - (v_3, e_1)\, e_1 - (v_3, e_2)\, e_2 = X^2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx -$$

$$- \frac{9}{4} X \int_{-1}^{1} x^3 dx = X^2 - \frac{1}{3}.$$

Ortonormând vectorul f_3, găsim baza ortonormată $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}_2[X]$, unde

$$e_3 = \frac{1}{\|f_3\|} f_3 = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(X^2 - \frac{1}{3} \right).$$

■

Problema 1.2.14 *Să se determine în spaţiul aritmetic* $\mathbb{R}^3$ *complementul ortogonal al subspaţiului vectorial al soluţiilor sistemului*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

şi să se găsească o bază ortonormată în acest complement.

Rezolvare. Subspaţiul dat este $S = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Condiţia ca un vector $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ să fie ortogonal pe subspaţiul S este ca $\alpha v_1 + \alpha v_3 = 0$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte, complementul ortogonal al lui S este

$$S^{\perp} = \{(v_1, v_2, -v_1) \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}.$$

O bază ortogonală în $S^{\perp}$ se obţine luând $v_1 = 1, v_2 = 0$ şi viceversa. După ortonormarea acestor vectori găsim baza ortonormată

$$B^{\perp} = \left\{ e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), e_2 = (0, 1, 0) \right\}.$$

■

Problema 1.2.15 *Să se determine în* $\mathbb{R}^3$ *complementul ortogonal al subspaţiului generat de vectorii* $v_1 = (1,0,2)\,,\ v_2 = (-2,0,1)\,.$ *Să se găsească apoi descompunerea* $v = w + w_1$ *a vectorului* $v = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ *pe cele două subspaţii complementare şi să se verifice relaţia* $\|v\|^2 = \|w\|^2 + \|w_1\|^2$ ***(Teorema lui Pitagora)****.*

Rezolvare. Fie S subspaţiul generat de vectorii liniar independenţi v_1 şi v_2. Dacă $z = (\alpha, \beta, \gamma) \in S^{\perp}$, unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, atunci vectorul z este ortogonal şi pe vectorul v_1 şi pe vectorul v_2. Aceste condiţii conduc la sistemul liniar

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ -2\alpha + \gamma = 0, \end{cases}$$

ale cărui soluţii sunt $\alpha = \gamma = 0$. Prin urmare, avem $S^{\perp} = \{(0, \beta, 0) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$. Mai mult, este evident că $w = (1,0,1)\,,\ w_1 = (0,1,0)$. Teorema lui Pitagora este imediată. ■

1.3 Probleme propuse

Problema 1.3.1 *Fie* V *şi* W *două* K*-spaţii vectoriale. Să se arate că produsul cartezian* $V \times W = \{(x,y) \mid x \in V,\ y \in W\}$ *este un* K*-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile*

$$\begin{cases} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,, \\ \alpha\,(x,y) = (\alpha x, \alpha y)\,, \quad \forall\ x_1, x_2 \in V,\ y_1, y_2 \in W, \forall\ \alpha \in K. \end{cases}$$

Problema 1.3.2 *Să se precizeze dacă operaţiile definite pe mulţimile indicate determină o structură de spaţiu vectorial:*

a) $\begin{cases} x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)\,, \\ \alpha x = (0, \alpha x_2)\,, \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^2,\ x = (x_1, x_2)\,,\ \ y = (y_1, y_2)\,, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = (x_1 + y_2, x_2 + y_1)\,, \\ \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2)\,, \quad \forall\ x = (x_1, x_2)\,,\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \oplus y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}, \\ \alpha \otimes x = \alpha x, \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_3, x_3 - y_2,)\,, \\ \alpha x = (\alpha x_3, \alpha x_2, \alpha x_1)\,, \quad x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$

R. a) Nu. b) Nu. c) Da. d) Nu.

Problema 1.3.3 *Utilizând criteriul de subspaţiu, să se decidă care dintre submulţimile de mai jos formează subspaţii vectoriale în spaţiile vectoriale indicate:*

a) $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$;

b) $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y + 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$;

c) $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$;

d) $S_4 = \{\alpha X^2 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}_2[x]$;

e) $S_4 = \{f \mid grad\ (f) \geq 2\} \subset \mathbb{R}_4[x]$;

f) $S_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$;

g) $S_7 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$;

h) $S_8 = \{f \in C^0([0, 1]) \mid f$ - derivabilă$\} \subset C^0([0, 1])$;

i) $S_9 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \cdot {}^tA = I_2\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

R. a) Da. b) Nu. c) Nu. d) Da. e) Nu. f) Da. g) Da. h) Da. i) Nu.

Problema 1.3.4 *Să se stabilească dependenţa sau independenţa liniară a sistemelor de vectori:*

a) $S_1 = \{u_1 = (1, 1, 0)\,,\ u_2 = (1, 0, 2)\,,\ u_3 = (0, -1, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$;

b) $S_2 = \{v_1 = (1, 1, 2)\,, v_2 = (2, 2, 4)\} \subset \mathbb{R}^3$;

c) $S_3 = \{v_1 = X - 1, v_2 = X^3\} \subset \mathbb{R}_3[X]$;

d) $S_4 = \{v_1 \equiv 1, v_2 \equiv \cos 2x, v_3 \equiv \cos 4x, v_4 \equiv \cos^4 x\} \subset C^0(\mathbb{R})$;

e) $S_5 = \{v_1 \equiv e^x, v_2 \equiv xe^x, ..., v_n \equiv x^{n-1}e^x\} \subset C^0(\mathbb{R})$;

f) $S_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

R. a) Dependenţi, $u_3 = u_2 - u_1$. b) Dependenţi, $v_2 = 2v_1$. c) Independenţi. d) Dependenţi, $v_3 = 8v_4 - 4v_2 - 3v_1$. e) Independenţi. f) Independenţi.

Problema 1.3.5 *Să se determine suma şi intersecţia subspaţiilor generate de sistemele de vectori*

$$U = \{u_1 = (1,1,0)\,,\ u_2 = (1,0,2)\,,\ u_3 = (0,-1,2)\} \subset \mathbb{R}^3,$$
$$V = \{v_1 = (1,1,2)\,, v_2 = (0,2,4)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

R. $U + V = \mathbb{R}^3$, $U \cap V = \{(2\delta, \delta, 2\delta) \mid \delta \in \mathbb{R}\}$.

Problema 1.3.6 *Să se determine subspaţiul sumă directă* $U \oplus V \subset \mathbb{R}^3$, *unde*

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0, 3x - z = 0\right\},$$
$$V = L\left(\{(-1,2,1)\,, (2,-4,-2)\}\right).$$

R. $U \oplus V = \{(a,b,a+b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

Problema 1.3.7 *Să se determine câte o bază în subspaţiile* $U+V$, *respectiv* $U \cap V$, *şi să se verifice teorema lui Grassmann (a dimensiunii) pentru:*

a) $\begin{cases} U = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\right\} \subset \mathbb{R}^3, \\ V = L\left(\{v_1 = (1,1,1)\,, v_2 = (1,0,0)\,, v_3 = (3,2,2)\}\right) \subset \mathbb{R}^3; \end{cases}$

b) $\begin{cases} U = L\left(\{(1,0,2,-1)\,, (0,1,1,0)\}\right) \subset \mathbb{R}^4, \\ V = L\left(\{(2,-1,1,0)\,, (-1,0,1,2)\,, (0,2,1,0)\}\right) \subset \mathbb{R}^4. \end{cases}$

R. a) $U + V = \mathbb{R}^3$, $U \cap V = \{(\gamma,\gamma,\gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1,1)\})$.
b) $U + V = \mathbb{R}^4$, $U \cap V = \{(-4\beta, 17\beta, 9\beta, 4\beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$, adică avem $U \cap V = L(\{(-4,17,9,4)\})$.

Problema 1.3.8 *Să se precizeze care din următoarele sisteme de vectori formează baze în spaţiile vectoriale date:*

a) $S_1 = \{u_1 = (1,2)\,,\ u_2 = (2,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$;

b) $S_2 = \{u_1 = (1,0,-1)\,,\ u_2 = (2,1,-3)\,,\ u_3 = (1,-1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$;

c) $S_3 = \{u_1 = (1,0,1)\,,\ u_2 = (0,-1,1)\,,\ u_3 = (1,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$;

d) $S_4 = \left\{1, 1-X, (1-X)^2, (1-X)^3\right\} \subset \mathbb{R}_3[X]$;

e) $S_5 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

R. a) Bază. b) Nu e bază. c) Bază. d) Bază. e) Bază.

Problema 1.3.9 *Să se calculeze coordonatele vectorilor următori în bazele precizate:*

a) $v = (7, 14, -1, 2)$, *unde*

$$B = \{(1, 2, -1, -2), (2, 3, 0, -1), (1, 2, 1, 4), (1, 3, -1, 0)\} \subset \mathbb{R}^4;$$

b) $v = X^5 - X^4 + X^3 - X^2 - X + 1$, *unde*

$$B = \{1 + X^3, X + X^3, X^2 + X^3, X^3, X^4 + X^3, X^5 + X^3\} \subset \mathbb{R}_5[X].$$

R. a) $x = (0, 2, 1, 2)$. b) $x = (1, -1, -1, 2, -1, 1)$.

Problema 1.3.10 *Să se determine coordonatele vectorului* $x \in \mathbb{R}^3$ *în baza*

$$B_2 = \{g_1 = (1, -1, 1), g_2 = (3, 2, 1), g_3 = (0, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3,$$

ştiind că în baza

$$B_1 = \{f_1 = (1, 1, 1), f_2 = (1, 1, 0), f_3 = (1, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$$

are coordonatele $(1, 2, 3)$.

R. $x_2 = (-3/2, 5/2, -7/2)$.

Problema 1.3.11 *Să considerăm spaţiul vectorial real al matricilor* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*, precum şi baza canonică din acest spaţiu*

$$B = \left\{E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

a) *Să se găsească câte o bază* B_1*, respectiv* B_2*, în subspaţiul matricelor simetrice* $S_2 \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*, respectiv matricelor antisimetrice* $A_2 \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *şi să se determine matricea de trecere de la baza canonică* B *la baza* $B' = B_1 \cup B_2$.

b) *Să se exprime matricea* $E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *în baza* B'.

R. a) Avem $B_1 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ şi $B_2 = \left\{ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Matricea de trecere este

$$M_{BB'} = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $E = a \cdot e_1 + \dfrac{b+c}{2} \cdot e_2 + d \cdot e_3 + \dfrac{b-c}{2} \cdot e_4.$

Problema 1.3.12 *Folosind procedeul de ortonormalizare Gramm-Schmidt, să se ortonormeze următoarele sisteme de vectori liniar independenţi:*

a) $v_1 = (1,1,0)\,, v_2 = (1,0,1)\,, v_3 = (0,0,-1)$ în $\mathbb{R}^3$;

b) $v_1 = (1,1,0,0)\,, v_2 = (1,0,1,0)\,, v_3 = (1,0,0,1)\,, v_4 = (0,1,1,1)$ în $\mathbb{R}^4$;

c) $v_1 = X^2 + X$, $v_2 = X^2 + 1$, $v_3 = -1$ în $(\mathbb{R}_2[X], (,))$.

R. a) $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$, $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$.

b) $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$, $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2,0)$, $e_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(1,-1,-1,3)$, $e_4 = \dfrac{1}{2}(-1,1,1,1)$.

c) $e_1 = \dfrac{\sqrt{15}}{4} \cdot (X^2 + X)$, $e_2 = \sqrt{\dfrac{3}{8}} \cdot (1 - X)$, $e_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot (5X^2 - X - 2)$.

Problema 1.3.13 *Să se verifice faptul că următoarele aplicaţii reprezintă produse scalare pe spaţiile vectoriale specificate şi să se ortonormeze în raport cu aceste produse scalare sistemele de funcţii date:.*

a) $\langle f, g \rangle = \int\limits_0^2 f(t)\, g(t)\, dt, \quad \forall\ f, g \in \mathcal{C}^0([0,2])$,

$B = \left\{ v_1 \equiv 1, v_2 \equiv t - 2, v_3 \equiv t^2 - 3t \right\}$;

b) $\langle f, g \rangle = \int\limits_0^1 x f(x)\, g(x)\, dx, \quad \forall\ f, g \in \mathcal{C}^0([0,1])$,

$B = \{ v_1 \equiv 1, v_2 \equiv e^x, v_3 \equiv e^{-x} \}$.

R. a) $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $e_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot (t-1)$, $e_3 = \sqrt{\dfrac{5}{8}} \cdot (3t^2 - 6t + 2)$.
b) $e_1 = \sqrt{2}$, $e_2 = \dfrac{2}{\sqrt{e^2+1}} \cdot (e^x - 2)$, $e_3 = \dfrac{1}{||f_3||} \cdot f_3$, unde

$$f_3 = \frac{6}{e^2 - 7} \cdot e^x + e^{-x} - \frac{2(e^2-1)}{e^2-7}.$$

Problema 1.3.14 *Să se găsească proiecţia vectorului* $v = (-1, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$ *pe subspaţiul soluţiilor sistemului omogen* $x + y + z = 0$.

R. Proiecţia căutată este vectorul $\Pr(v) = \dfrac{1}{3}(-5, 1, 4)$.

Problema 1.3.15 *Determinaţi complementele ortogonale ale subspaţiilor generate de următoarele sisteme de vectori:*

a) $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (2, 0, 1)$ în $\mathbb{R}^3$;

b) $v_1 = (-1, 1, 2, 0)$, $v_2 = (3, 0, 2, 1)$, $v_3 = (4, -1, 0, 1)$ în $\mathbb{R}^4$.

R. a) $W^\perp = \{(-2y, y, 4y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
b) $W^\perp = \left\{ \left(\dfrac{-2z - t}{3}, \dfrac{-8z - t}{3}, z, t \right) \middle| \; z, t \in \mathbb{R} \right\}$.

Problema 1.3.16 *Să se găsească proiecţia vectorului* $v = (14, -3, -6)$ *pe complementul ortogonal al subspaţiului generat de vectorii* $v_1 = (-3, 0, 7)$ *şi* $v_2 = (1, 4, 3)$ *din* $\mathbb{R}^3$. *Să se calculeze lungimea acestei proiecţii.*

R. Proiecţia căutată este vectorul $\Pr^\perp(v) = \dfrac{113}{74}(7, -4, 3)$. Lungimea este $||\Pr^\perp(v)|| = \dfrac{113}{\sqrt{74}}$.

Capitolul 2

Spaţii afine. Vectori liberi

2.1 Elemente teoretice fundamentale

Fie V un spaţiu vectorial peste un câmp K şi fie $\mathcal{M} = \{A, B, C, ...\}$ o mulţime nevidă de obiecte pe care le vom numi generic *puncte*.

Definiţia 2.1.1 *Se numeşte* ***spaţiu afin*** *tripletul* $\mathcal{A} = (\mathcal{M}, V, \phi)$, *unde*

$$\phi : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to V$$

este o funcţie care îndeplineşte condiţiile:

1. *Pentru orice* $A, B, C \in \mathcal{M}$ *avem* $\phi(A,B) + \phi(B,C) = \phi(A,C)$ *(**regula triunghiului**)*;

2. *Pentru orice vector* $\bar{v} \in V$ *şi orice* $A \in \mathcal{M}$, *există un unic punct* $B \in \mathcal{M}$ *astfel încât* $\phi(A,B) = \bar{v}$.

Observaţia 2.1.1 *Elementele unui spaţiu afin sunt puncte şi vectori. Spaţiul afin* $\mathcal{A}$ *poartă numele de spaţiu afin* ***real*** *sau* ***complex*** *după cum spaţiul vectorial* V *este real sau complex.* ***Dimensiunea*** *spaţiului afin* $\mathcal{A}$ *se defineşte ca fiind dimensiunea spaţiului vectorial V. Dacă, în plus,* V *are structură de spaţiu euclidian, atunci* $\mathcal{A}$ *se numeşte* ***spaţiu punctual euclidian****.*

Definiţia 2.1.2 *Două perechi de puncte (sau, două* ***bipuncte****)* (A, B) *şi* (C, D) *se spune că sunt* ***echipolente*** *dacă*

$$\phi(A,B) = \phi(C,D).$$

Relaţia de echipolenţă definită mai sus este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ a bipunctelor, iar mulţimea factor $(\mathcal{M} \times \mathcal{M})/_{\sim}$ se află în corespondenţă bijectivă cu spaţiul vectorial V. Din acest motiv, putem identifica clasa de echivalenţă $\overline{AB}$ a unui bipunct oarecare (A, B) cu vectorul $\bar{v} = \phi(A, B)$. Cu alte cuvinte vom scrie

$$\overline{AB} = \bar{v}.$$

Definiţia 2.1.3 *Clasele de echipolenţă* $\overline{AB}$ *se numesc* ***vectori liberi*** *sau, pe scurt,* ***vectori****.*

Fie $O \in \mathcal{M}$ un punct fixat numit *origine*. Atunci, mulţimea de bipuncte

$$\mathcal{A}^{\circ} = \{(O, A) \mid A \in \mathcal{M}\}$$

se află, de asemenea, în corespondenţă bijectivă cu spaţiul vectorial V (deci, şi cu mulţimea vectorilor liberi $(\mathcal{M} \times \mathcal{M})/_{\sim}$).

Definiţia 2.1.4 *Elementele mulţimii* $\mathcal{A}^{\circ}$*, care sunt reprezentante ale claselor de echivalenţă* $\overline{v}$*, le numim* ***vectori legaţi în origine*** *(****segmente orientate, vectori de poziţie****) şi le notăm cu săgeţi:*

$$(O, A) = \overrightarrow{OA} \in \overline{v}.$$

Observaţia 2.1.2 *Pentru fiecare vector liber* $\bar{v} \in V$ *există şi este unic un vector de poziţie* $\overrightarrow{OA}$ *astfel încât* $\overrightarrow{OA} \in \bar{v}$*.*

Definiţia 2.1.5 *Se numeşte* ***combinaţie afină*** *a punctelor* $A_0, A_1, ..., A_p \in \mathcal{M}$ *un punct* $P \in \mathcal{M}$ *definit de relaţia*

$$P = \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + ... + \alpha_p A_p, \text{ cu } \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_p = 1,$$

unde relaţia de mai sus este înţeleasă ca relaţia vectorială

$$\overline{OP} = \alpha_0 \overline{OA}_0 + \alpha_1 \overline{OA}_1 + ... + \alpha_p \overline{OA}_p.$$

Definiţia 2.1.6 *Un sistem finit de puncte* $\{A_0, A_1, ..., A_p\}$ *se numeşte* ***afin dependent*** *dacă există un punct din sistem care să fie o combinaţie afină a celorlalte puncte din sistem. În caz contrar, vom spune că sistemul de puncte este* ***afin independent****.*

Teorema 2.1.3 *Sistemul de puncte* $\{A_0, A_1, ..., A_p\}$ *este afin dependent (independent) dacă şi numai dacă sistemul de vectori* $\{\overline{A_0 A_1}, \overline{A_0 A_2}, ..., \overline{A_0 A_p}\}$ *este liniar dependent (independent).*

Să presupunem în cele ce urmează că $\mathcal{A}_n$ este un spaţiu afin de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$.

Definiţia 2.1.7 *O pereche $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$, unde $O \in \mathcal{M}$ este un punct fixat iar $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n\}$ este o bază a spaţiului vectorial V, se numeşte* ***reper cartezian*** *în spaţiul afin $\mathcal{A}_n$.*

Relativ la un reper cartezian fixat $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$, pentru fiecare punct $P \in \mathcal{M}$, vectorul de poziţie $\overline{OP}$ se scrie în mod unic sub forma

$$\overline{OP} = x_1\bar{e}_1 + ... + x_n\bar{e}_n.$$

Definiţia 2.1.8 *Scalarii $(x_1, x_2, ..., x_n) \overset{not}{=} (x_i)$ poartă numele de* ***coordonatele carteziene*** *ale punctului P în reperul $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$.*

Dacă $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ şi $\mathcal{R}' = \{O', \mathcal{B}'\}$ sunt două repere carteziene în care un punct P are coordonatele $(x_i)_{i=\overline{1,n}}$, respectiv $(x'_i)_{i=\overline{1,n}}$, atunci legătura dintre cele două seturi de coordonate este dată de relaţiile

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_j + a_{i0}, \ \forall\ i = \overline{1,n},$$

unde $(a_{i0})_{i=\overline{1,n}}$ sunt coordonatele punctului O' în reperul $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ şi $(c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$.

Observaţia 2.1.4 *Dacă utilizăm notaţiile matriceale*

$$X = {}^T(x_i), \ X' = {}^T(x'_i), \ C = (c_{ij}), \ A_0 = {}^T(a_{i0}),$$

atunci transformarea de coordonate de mai sus se scrie sub forma matriceală

$$X = CX' + A_0.$$

Definiţia 2.1.9 *În particular, o transformare de tipul $X = X' + A_0$ se numeşte* ***translaţie****, iar una de tipul $X = CX'$ se numeşte* ***centro-afinitate.***

Observaţia 2.1.5 *Orice transformare de repere carteziene este compunerea unei translaţii cu o centro-afinitate.*

Dacă alegem $\mathcal{M} = E_3$ - spaţiul punctual al geometriei sintetice elementare, $V = V_3$ - spaţiul vectorial real al vectorilor liberi, unde *vectorii liberi* sunt *clase de echipolenţă* ale segmentelor orientate (clase de

echipolenţă = segmente orientate care pot fi suprapuse prin paralelism), şi $\phi : E_3 \times E_3 \to V_3$ - funcţia care asociază bipunctului (A, B) vectorul liber $\overline{AB} \in V_3$, obţinem un spaţiu afin de dimensiune trei. Baza canonică în spaţiul vectorial real al vectorilor liberi V_3 este

$$\mathcal{B} = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\},$$

unde

$$\overline{i} \perp \overline{j} \perp \overline{k} \perp \overline{i} \text{ şi } ||\overline{i}|| = ||\overline{j}|| = ||\overline{k}|| = 1.$$

În consecinţă, orice vector liber $\overline{v} \in V_3$ se descompune în mod unic ca

$$\overline{v} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}.$$

Definiţia 2.1.10 *Tripletul* (E_3, V_3, ϕ) *se numeşte* ***spaţiul afin geometric al vectorilor liberi****.*

Observaţia 2.1.6 *În spaţiul afin geometric al vectorilor liberi trei puncte sunt afin dependente dacă şi numai dacă sunt coliniare, iar patru puncte sunt afin dependente dacă şi numai dacă sunt coplanare.*

Definiţia 2.1.11 ***Produsul scalar*** *a doi vectori oarecare* $\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$ *şi* $\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$ *este definit prin*

$$\left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle \overset{not}{=} \overline{a} \cdot \overline{b} \overset{def}{=} x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Definiţia 2.1.12 *Expresiile analitice ale* ***normei*** *unui vector şi respectiv* ***unghiului*** *a doi vectori sunt date de formulele:*

$$||\overline{v}|| \overset{def}{=} \sqrt{\langle \overline{v}, \overline{v} \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\cos\theta \overset{def}{=} \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{||\overline{a}|| \cdot ||\overline{b}||} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}, \ \theta \in [0, \pi].$$

Observaţia 2.1.7 *Vectorii nenuli* $\overline{a}$ *şi* $\overline{b}$ *sunt* ***ortogonali*** *sau* ***perpendiculari****, şi notăm* $\overline{a} \perp \overline{b}$*, dacă şi numai dacă*

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Definiţia 2.1.13 ***Produsul vectorial*** *a doi vectori oarecare* $\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$ *şi* $\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$ *este definit prin*

$$\overline{a} \times \overline{b} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Observaţia 2.1.8 *i) Produsul vectorial $\overline{a} \times \overline{b}$ este un vector perpendicular pe planul determinat de reprezentanţii într-un punct ai vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.*

ii) Doi vectori nenuli $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt ***coliniari*** *dacă şi numai dacă*

$$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Teorema 2.1.9 *i) Dacă $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt necoliniari, atunci norma $||\overline{a} \times \overline{b}||$ reprezintă* ***aria paralelogramului*** *construit pe reprezentanţii într-un punct ai vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.*

ii) Următoarea ***formulă a dublului produs vectorial*** *este adevărată:*

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a} \cdot \overline{c})\overline{b} - (\overline{a} \cdot \overline{b})\overline{c}.$$

Definiţia 2.1.14 ***Produsul mixt*** *a trei vectori oarecare $\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$, $\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$ şi $\overline{c} = x_3\overline{i} + y_3\overline{j} + z_3\overline{k}$ este definit prin*

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \stackrel{def}{=} \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Observaţia 2.1.10 *Trei vectori $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$ sunt* ***coplanari*** *dacă şi numai dacă $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0$.*

Teorema 2.1.11 *Dacă $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$ sunt necoplanari, atunci modulul $|(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})|$ reprezintă* ***volumul paralelipipedului*** *construit pe reprezentanţii într-un punct ai vectorilor $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$.*

2.2 Probleme rezolvate

Problema 2.2.1 *Fie A şi B două puncte distincte ale unui spaţiu afin real $\mathcal{A}$ şi fie punctele C, $D \in \mathcal{A}$ definite prin*

$$C = \frac{1}{1-\lambda}A + \frac{\lambda}{\lambda - 1}B, \ D = \frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{1+\lambda}B,$$

unde $\lambda \in \mathbb{R}^* \backslash \{\pm 1\}$. Să se arate că dacă

$$E = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D,$$

atunci avem $\overline{EA} = \lambda^2 \overline{EB}$.

Rezolvare. Relaţile din ipoteză se scriu sub forma

$$\begin{cases} A - \lambda B = (1-\lambda)C \\ A + \lambda B = (1+\lambda)D. \end{cases}.$$

Rezolvând sistemul, găsim

$$A = \frac{1}{2}[(1-\lambda)C + (1+\lambda)D], \ B = \frac{1}{2\lambda}[(\lambda-1)C + (1+\lambda)D].$$

Pe de altă parte, avem însă

$$\overline{EA} = \overline{OA} - \overline{OE} = \frac{1}{2}[(1-\lambda)\overline{OC} + (1+\lambda)\overline{OD}] - \frac{1}{2}\overline{OC} - \frac{1}{2}\overline{OD} = \frac{\lambda}{2}\overline{CD}$$

şi

$$\overline{EB} = \overline{OB} - \overline{OE} = \frac{1}{2\lambda}[(\lambda-1)\overline{OC} + (1+\lambda)\overline{OD}] - \frac{1}{2}\overline{OC} - \frac{1}{2}\overline{OD} = \frac{1}{2\lambda}\overline{CD}.$$

În concluzie, rezultă relaţia căutată. ■

Problema 2.2.2 *Punctul M împarte segmentul AB în raportul $k = \frac{m}{n}$. Să se demonstreze că*

$$\overline{OM} = \frac{n}{m+n}\overline{OA} + \frac{m}{m+n}\overline{OB}, \ \forall\ O \in \mathcal{A}.$$

Rezolvare. Din relaţia

$$\overline{AM} = \frac{m}{n}\overline{MB} \Leftrightarrow n\left(\overline{OM} - \overline{OA}\right) = m(\overline{OB} - \overline{OM}),$$

rezultă

$$(m+n)\overline{OM} = n\overline{OA} + m\overline{OB}.$$

Împărţind ultima relaţie prin $m+n$, obţinem egalitatea cerută. ■

Problema 2.2.3 *Fie $A_1,\ A_2, ...,\ A_n \in \mathcal{A}$ şi $\lambda_1,\ \lambda_2, ...,\ \lambda_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i = \lambda \neq 0$. Să se arate că punctul P este centru de greutate al sistemului de puncte $\{A_1,\ A_2, ...,\ A_n\}$ cu ponderile $\frac{\lambda_i}{\lambda}$ dacă şi numai dacă*

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overline{PA}_i = \overline{0}.$$

Să se scrie relaţia pentru centrul de greutate al unui triunghi.

Rezolvare. Prin definiţie, punctul P este centru de greutate al sistemului de puncte $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ cu ponderile $\frac{\lambda_i}{\lambda}$ dacă şi numai dacă

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} A_i.$$

Relaţia anterioară este însă echivalentă cu

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (A_i - P) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{PA}_i = 0.$$

În cazul unui triunghi $A_1A_2A_3$, punctul P este centru de greutate dacă şi numai dacă

$$P = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3}.$$

Prin urmare, ne aflăm în condiţiile din ipoteză, cu

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}.$$

Ţinând cont de cele demonstrate mai sus, condiţia necesară şi suficientă ca punctul P să fie centrul de greutate al triunghiului $A_1A_2A_3$ este

$$\overline{PA}_1 + \overline{PA}_2 + \overline{PA}_3 = \overline{0}.$$

■

Problema 2.2.4 *Fie A, B, C trei puncte afin independente. Să se arate că dacă punctele P şi Q împart vectorii $\overline{AB}$ şi respectiv $\overline{AC}$ în acelaşi raport, atunci vectorii $\overline{PQ}$ şi $\overline{BC}$ sunt coliniari şi reciproc (**Teorema lui Thales**).*

Rezolvare. " $\Rightarrow$ " Să presupunem că $\overline{AP} = \rho\overline{AB}$ şi $\overline{AQ} = \rho\overline{AC}$, unde $\rho \neq 0$. Atunci avem

$$\overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP} = \rho(\overline{AC} - \overline{AB}) = \rho\overline{BC}.$$

Rezultă că vectorii $\overline{PQ}$ şi $\overline{BC}$ sunt liniar dependenţi, adică coliniari.

" $\Leftarrow$ " Reciproc, să presupunem că vectorii $\overline{PQ}$ şi $\overline{BC}$ sunt coliniari, adică există $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ astfel încât $\overline{PQ} = \alpha\overline{BC}$. Totodată să considerăm vectorii

$$\overline{AP} = \rho_1\overline{AB}, \ \overline{AQ} = \rho_2\overline{AC}, \ \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Înlocuind pe $\overline{AQ}$ şi $\overline{AP}$ în relaţia

$$\overline{AQ} - \overline{AP} = \alpha(\overline{AC} - \overline{AB}),$$

deducem că

$$(\alpha - \rho_1)\,\overline{AB} + (\rho_2 - \alpha)\,\overline{AC} = 0.$$

În final, deoarece, din ipoteză, vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ sunt necoliniari (liniar independenţi), obţinem că

$$\rho_1 - \alpha = \rho_2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 = \alpha.$$

■

Problema 2.2.5 *Fie triunghiul $\triangle ABC$ şi fie M mijlocul lui BC. Atunci are loc* ***relaţia vectorială a medianei***

$$2\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}.$$

Rezolvare. Fie A' simetricul punctului A faţă de M. Evident avem

$$\overline{AA'} = 2\overline{AM}.$$

Deoarece în patrulaterul $ABA'C$ diagonalele se înjumătăţesc, rezultă că patrulaterul $ABA'C$ este un paralelogram. Prin urmare, din regula paralelogramului, avem

$$\overline{AA'} = \overline{AB} + \overline{AC},$$

adică ceea ce aveam de demonstrat. ■

Problema 2.2.6 *Fie $ABCD$ un paralelogram şi fie O punctul de intersecţie al diagonalelor sale. Fie S un punct arbitrar din spaţiu. Atunci avem*

$$4\overline{SO} = \overline{SA} + \overline{SB} + \overline{SC} + \overline{SD}.$$

Rezolvare. Deoarece $ABCD$ este un paralelogram, rezultă că diagonalele se înjumătăţesc, adică $||\overline{AO}|| = ||\overline{OC}||$ şi $||\overline{BO}|| = ||\overline{OD}||$. Aplicăm acum relaţia vectorială a medianei în triunghiurile $\triangle SAC$ şi $\triangle SBD$ şi găsim egalităţile

$$2\overline{SO} = \overline{SA} + \overline{SC},$$
$$2\overline{SO} = \overline{SB} + \overline{SD}.$$

Adunând aceste relaţii rezultă egalitatea cerută. ■

Problema 2.2.7 *Într-un cerc de centru O se consideră două coarde AMB şi CMD perpendiculare între ele. Să se demonstreze că*

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 2\overline{MO}.$$

Rezolvare. Alegem pe segmentul $[CD]$ punctul D' cu proprietatea că

$$||\overline{DD'}|| = ||\overline{CM}||,$$

iar pe segmentul $[AB]$ punctul B' cu proprietatea că

$$||\overline{BB'}|| = ||\overline{MA}||.$$

Evident, atunci avem

$$\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MB'}$$

şi

$$\overline{MC} + \overline{MD} = \overline{MD'}.$$

Din construcţie, se vede usor că avem

$$\triangle AOB' \equiv \triangle BOM \Rightarrow ||\overline{OB'}|| = ||\overline{OM}||,$$
$$\triangle DOD' \equiv \triangle COM \Rightarrow ||\overline{OD'}|| = ||\overline{OM}||.$$

Deoarece unghiul $\widehat{B'MD'}$ este drept, rezultă că punctele B', O şi D' sunt coliniare şi $[BO]$ este mediană în triunghiul $\triangle B'MD'$. Aplicând acum relaţia medianei, obţinem

$$\overline{MB'} + \overline{MD'} = 2\overline{MO}.$$

■

Problema 2.2.8 *Punctul H este ortocentrul triunghiului $\triangle ABC$ dacă şi numai dacă au loc egalităţile*

$$\overline{HA} \cdot \overline{HB} = \overline{HB} \cdot \overline{HC} = \overline{HC} \cdot \overline{HA}.$$

Rezolvare. Evident, vectorul $\overline{HA}$ este înălţime în triunghiul $\triangle ABC$ dacă şi numai dacă

$$\overline{HA} \cdot \overline{BC} = 0 \Leftrightarrow \overline{HA} \cdot (\overline{HC} - \overline{HB}) = 0.$$

Egalităţile de demonstrat sunt acum imediate. ■

Problema 2.2.9 *Să se arate că dacă vectorii $\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n}$ şi $\overline{b} = \overline{m} + \overline{n}$ sunt coliniari, atunci vectorii $\overline{m}$ şi $\overline{n}$ sunt coliniari.*

Rezolvare. Vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă

$$\begin{aligned}\overline{a}\times\overline{b} &= \overline{0} \Leftrightarrow (2\overline{m}+\overline{n})\times(\overline{m}+\overline{n}) = \overline{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\overline{m}\times\overline{n}+\overline{n}\times\overline{m} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{m}\times\overline{n} = \overline{0}.\end{aligned}$$

■

Problema 2.2.10 *Fie vectorii* $\overline{a}=\overline{m}+2\overline{n}$, $\overline{b}=\overline{m}-3\overline{n}$, *unde*

$$\|\overline{m}\| = 5,\ \ \|\overline{n}\| = 3,\ \measuredangle(\overline{m},\overline{n}) = \frac{\pi}{2}.$$

Să se calculeze:

a) *lungimile diagonalelor paralelogramului construit pe* $\overline{a}$ *şi* $\overline{b}$*;*

b) *unghiul dintre diagonale;*

c) *aria paralelogramului determinat de* $\overline{a}$ *şi* $\overline{b}$*.*

Rezolvare. a) Diagonalele paralelogramului construit pe $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt determinate de vectorii $\overline{a}+\overline{b}$ şi $\overline{a}-\overline{b}$. Prin urmare, avem

$$\begin{aligned}\left\|\overline{a}+\overline{b}\right\| &= \sqrt{\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}\right)} = \sqrt{(2\overline{m}-\overline{n})\cdot(2\overline{m}-\overline{n})} = \\ &= \sqrt{4\left\|\overline{m}\right\|^2-4\overline{m}\cdot\overline{n}+\left\|\overline{n}\right\|^2} = \sqrt{4\left\|\overline{m}\right\|^2+\left\|\overline{n}\right\|^2} = \sqrt{109},\end{aligned}$$

$$\left\|\overline{a}-\overline{b}\right\| = \sqrt{\left(\overline{a}-\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{a}-\overline{b}\right)} = \sqrt{(5\overline{n})\cdot(5\overline{n})} = 5\left\|\overline{n}\right\| = 15.$$

b) Deoarece avem

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{a}-\overline{b}\right) = (2\overline{m}-\overline{n})\cdot(5\overline{n}) = 10\overline{m}\cdot\overline{n}-5\left\|\overline{n}\right\|^2 = -45,$$

rezultă că unghiul dintre diagonale este

$$\cos\theta = \frac{\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{a}-\overline{b}\right)}{\left\|\overline{a}+\overline{b}\right\|\cdot\left\|\overline{a}-\overline{b}\right\|} = -\frac{3}{\sqrt{109}}.$$

d) Aria paralelogramului este

$$\mathcal{A}_{\text{paralelogram}} = \left\|\overline{a}\ \times\overline{b}\right\| = \left\|5\overline{n}\ \times\overline{m}\right\| = 5\left\|\overline{n}\right\|\cdot\left\|\overline{m}\right\| = 75.$$

■

Problema 2.2.11 *Să se demonstreze identitatea lui Jacobi:*

$$\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})+\overline{c}\times(\overline{a}\times\overline{b})+\overline{b}\times(\overline{c}\times\overline{a})=\overline{0}.$$

Rezolvare. Utilizând formula dublului produs vectorial, găsim egalităţile

$$\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})=\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)\overline{c}-(\overline{a}\cdot\overline{c})\,\overline{b},\quad \overline{c}\times(\overline{a}\times\overline{b})=(\overline{c}\cdot\overline{a})\,\overline{b}-\left(\overline{c}\cdot\overline{b}\right)\overline{a},$$

$$\overline{b}\times(\overline{c}\times\overline{a})=\left(\overline{b}\cdot\overline{c}\right)\overline{a}-\left(\overline{b}\cdot\overline{a}\right)\overline{c}.$$

Adunând cele trei relaţii, obţinem egalitatea cerută. ■

Problema 2.2.12 *Să se demonstreze relaţia*

$$(\overline{a}\times\overline{b},\overline{b}\times\overline{c},\overline{c}\times\overline{a})=(\overline{a},\overline{b},\overline{c})^2.$$

Dacă $\overline{a}\times\overline{b}$, $\overline{b}\times\overline{c}$, $\overline{c}\times\overline{a}$ *sunt coplanari, atunci ei sunt şi coliniari.*

Rezolvare. Utilizând formula dublului produs vectorial obţinem relaţia

$$(\overline{b}\times\overline{c})\times(\overline{c}\times\overline{a})=\left[(\overline{b}\times\overline{c})\cdot\overline{a}\right]\overline{c}-\left[(\overline{b}\times\overline{c})\cdot\overline{c}\right]\overline{a}=(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\overline{c}.$$

Folosind acum şi definiţia produsului mixt, deducem că

$$\begin{aligned}(\overline{a}\times\overline{b},\overline{b}\times\overline{c},\overline{c}\times\overline{a}) &= \left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\left[(\overline{b}\times\overline{c})\times(\overline{c}\times\overline{a})\right]=\\ &= (\overline{a},\overline{b},\overline{c})\left[\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}\right]=(\overline{a},\overline{b},\overline{c})^2.\end{aligned}$$

Din relaţia anterioară deducem că dacă $\overline{a}\times\overline{b}$, $\overline{b}\times\overline{c}$, $\overline{c}\times\overline{a}$ sunt coplanari, atunci $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$ sunt coplanari. Prin urmare, $\overline{a}\times\overline{b}$, $\overline{b}\times\overline{c}$, $\overline{c}\times\overline{a}$ sunt şi coliniari.
■

Problema 2.2.13 *Să se dovedească identitatea lui Lagrange:*

$$\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)^2+\left\|\overline{a}\times\overline{b}\right\|^2=\|\overline{a}\|^2\cdot\left\|\overline{b}\right\|^2.$$

Rezolvare. Relaţia de demonstrat este imediată dacă ţinem cont că

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\|\overline{a}\|\cdot\left\|\overline{b}\right\|\cdot\cos\theta$$

şi

$$\left\|\overline{a}\times\overline{b}\right\|=\|\overline{a}\|\cdot\left\|\overline{b}\right\|\cdot\sin\theta.$$

■

Problema 2.2.14 *Fie $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ trei vectori necoplanari. Arătaţi că există vectorii $\overline{a}'$, $\overline{b}'$, $\overline{c}'$ (numiţi* ***reciprocii*** *vectorilor $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$) cu proprietăţile:*

$$\begin{array}{lll} \overline{a}'\cdot\overline{a}=1, & \overline{a}'\cdot\overline{b}=0, & \overline{a}'\cdot\overline{c}=0; \\ \overline{b}'\cdot\overline{a}=0, & \overline{b}'\cdot\overline{b}=1, & \overline{b}'\cdot\overline{c}=0; \\ \overline{c}'\cdot\overline{a}=0, & \overline{c}'\cdot\overline{b}=0, & \overline{c}'\cdot\overline{c}=1. \end{array}$$

Rezolvare. Din proprietăţile de mai sus, rezultă că vectorul $\overline{a}'$ este perpendicular atât pe $\overline{b}$ cât şi pe $\overline{c}$, şi deci este coliniar cu produsul vectorial $\overline{b}\times\overline{c}$. Prin urmare, există $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\overline{a}'=\lambda\left(\overline{b}\times\overline{c}\right).$$

Acum, din condiţia $\overline{a}'\cdot\overline{a}=1$, obţinem

$$\lambda=\frac{1}{(\overline{a},\overline{b},\overline{c})}.$$

Analog, găsim

$$\overline{b}'=\frac{\overline{c}\times\overline{a}}{(\overline{a},\overline{b},\overline{c})},\ \overline{c}'=\frac{\overline{a}\times\overline{b}}{(\overline{a},\overline{b},\overline{c})}.$$

■

Problema 2.2.15 *Fie vectorul $\overline{v}=2\overline{i}+\alpha\overline{j}+\beta\overline{k}$, unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Să se determine α şi β astfel încât $\overline{v}$ să fie perpendicular pe vectorii $\overline{a}=-\overline{i}+4\overline{j}+2\overline{k}$ şi $\overline{b}=3\overline{i}-3\overline{j}-2\overline{k}$. Cu α şi β astfel calculaţi să se determine unghiul dintre $\overline{v}$ şi $\overline{a}+\overline{b}$.*

Rezolvare. Vectorul $\overline{v}$ este perpendicular pe vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ dacă şi numai dacă $\overline{v}$ este coliniar cu produsul vectorial $\overline{a}\times\overline{b}$. Însă avem

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}=-2\overline{i}+4\overline{j}-9\overline{k}.$$

Punând condiţia $\overline{v}=\lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$, unde $\lambda\in\mathbb{R}$, obţinem $\alpha=-4$, $\beta=9$.

Unghiul dintre $\overline{v}$ şi $\overline{a}+\overline{b}$ este dat de formula

$$\cos\theta=\frac{\overline{v}\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}\right)}{||\overline{v}||\cdot||\overline{a}+\overline{b}||}=0\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\overline{v}\perp\left(\overline{a}+\overline{b}\right).$$

Observaţie: Problema se poate rezolva şi punând condiţiile

$$\overline{v}\cdot\overline{a}=0,\ \overline{v}\cdot\overline{b}=0.$$

■

Problema 2.2.16 *Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii*

$$\overline{v}_1 = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k},\ \overline{v}_2 = 2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k},\ \overline{v}_3 = \lambda\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$$

să fie coplanari şi să se găsească relaţia de dependenţă liniară.

Rezolvare. Condiţia de coplanaritate este

$$(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ \lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3.$$

Pentru a găsi relaţia de dependenţă liniară, se determină α şi β din egalitatea

$$\overline{v}_3 = \alpha\overline{v}_1 + \beta\overline{v}_2 \Rightarrow \alpha = \beta = -1.$$

În concluzie, relaţia de dependenţă liniară este $\overline{v}_3 = -\overline{v}_1 - \overline{v}_2$. ■

Problema 2.2.17 *Să se calculeze aria şi înălţimea din A pentru triunghiul $\triangle ABC$ determinat de punctele $A(0,1,0)$, $B(2,0,1)$, $C(-1,0,-4)$.*

Rezolvare. Punctele A, B şi C determină vectorii

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}, \\ \overline{AC} &= \overline{OC} - \overline{OA} = -\overline{i} - \overline{j} - 4\overline{k}, \\ \overline{BC} &= \overline{OC} - \overline{OB} = -3\overline{i} - 5\overline{k}. \end{aligned}$$

Produsul vectorial al vectorilor $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ este

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 5\overline{i} + 7\overline{j} - 3\overline{k}.$$

Prin urmare, aria triunghiului $\triangle ABC$ este dată de formula

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|\right| = \frac{\sqrt{83}}{2}.$$

Înălţimea din A se determină din relaţia

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}h_A \cdot \left\|\overline{BC}\right\| \Leftrightarrow h_A = \frac{2S_{ABC}}{\left\|\overline{BC}\right\|} = \sqrt{\frac{83}{34}}.$$

■

Problema 2.2.18 *Să se calculeze volumul tetraedrului $ABCD$ şi înălţimea din A a acestuia, unde $A(3,2,-1)$, $B(4,3,-1)$, $C(5,3,-1)$, $D(4,2,1)$.*

Rezolvare. Punctele A, B, C şi D determină vectorii

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{i} + \overline{j},\\ \overline{AC} &= \overline{OC} - \overline{OA} = 2\overline{i} + \overline{j},\\ \overline{AD} &= \overline{OD} - \overline{OA} = \overline{i} + 2\overline{k}.\end{aligned}$$

Produsul mixt al vectorilor $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ şi $\overline{AD}$ este

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Prin urmare, volumul tetraedrului $ABCD$ este dat de formula

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)\right| = \frac{1}{3}.$$

Produsul vectorial al vectorilor $\overline{BC}$ şi $\overline{BD}$ este

$$\overline{BC} \times \overline{BD} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\overline{j} - \overline{k},$$

şi deci, aria triunghiului $\triangle BCD$ este

$$\mathcal{A}_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}\left|\left|\overline{BC} \times \overline{BD}\right|\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Înălţimea din A a tetraedrului $ABCD$ se determină din relaţia

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} h_A \cdot \mathcal{A}_{\triangle BCD}. \Leftrightarrow h_A = \frac{3V_{ABCD}}{\mathcal{A}_{\triangle BCD}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

■

Problema 2.2.19 *Să se rezolve ecuaţia $\overline{x} \times (\overline{x} \times \overline{a}) = \overline{b}$, unde $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt vectori nenuli şi necoliniari daţi.*

Rezolvare. Înmulţind scalar ecuaţia cu $\overline{x} \times \overline{a}$, deducem că

$$\left(\overline{b}, \overline{x}, \overline{a}\right) = \left(\overline{x}, \overline{a}, \overline{b}\right) = 0 \Rightarrow \overline{x} \perp \overline{a} \times \overline{b}.$$

De asemenea, înmulţind scalar cu $\overline{x}$, rezultă că $\overline{x} \perp \overline{b}$. Prin urmare vectorul $\overline{x}$ este coliniar cu produsul vectorial $\overline{b} \times (\overline{a} \times \overline{b})$. Cu alte cuvinte, există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\overline{x} = \lambda \left[\overline{b} \times (\overline{a} \times \overline{b}) \right].$$

Pentru a determina pe λ, fie înlocuim în ecuaţia iniţială, fie observăm că

$$\| \overline{x} \times (\overline{x} \times \overline{a}) \| = \left\| \overline{b} \right\| \Rightarrow \| \overline{x} \|^2 \cdot \| \overline{a} \| \cdot \sin \sphericalangle (\overline{a}, \overline{x}) = \left\| \overline{b} \right\|.$$

Ţinând cont de faptul că $\overline{x} \perp \overline{b}$ şi că vectorul $\overline{x}$ este situat în planul vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, deducem că

$$\sin \sphericalangle (\overline{a}, \overline{x}) = \cos \sphericalangle \left(\overline{a}, \overline{b}\right) \Rightarrow \| \overline{x} \|^2 \cdot \| \overline{a} \| \cdot \cos \sphericalangle \left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left\| \overline{b} \right\| \Leftrightarrow \| \overline{x} \| = \frac{\left\| \overline{b} \right\|}{\sqrt{\overline{a} \cdot \overline{b}}}.$$

Pe de altă parte avem

$$\| \overline{x} \| = \left\| \lambda \left[\overline{b} \times (\overline{a} \times \overline{b}) \right] \right\| = |\lambda| \cdot \left\| \overline{b} \right\|^2 \cdot \| \overline{a} \| \cdot \sin \sphericalangle \left(\overline{a}, \overline{b}\right) = |\lambda| \cdot \left\| \overline{b} \right\| \cdot \left\| \overline{a} \times \overline{b} \right\|.$$

În concluzie, se obţine

$$\lambda = \pm \frac{1}{\left\| \overline{a} \times \overline{b} \right\| \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{b}}}.$$

■

2.3 Probleme propuse

Problema 2.3.1 *Fie A_1, A_2, ..., $A_n \in \mathcal{A}$ şi λ_1, λ_2, ..., $\lambda_n \in \mathbb{R}$ cu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. Să se arate că vectorul*

$$\overline{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{MA_i}$$

nu depinde de alegerea punctului $M \in \mathcal{A}$.

Ind. Pentru orice alt punct $M' \neq M$ avem egalitatea triunghiului $\overline{M'A_i} = \overline{M'M} + \overline{MA_i}$.

Problema 2.3.2 *Fie G centrul de greutate al triunghiului $\triangle ABC$ şi M un punct oarecare din spaţiu. Să se demonstreze relaţia*

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}.$$

Ind. Se folosesc relaţia triunghiului $\overline{MG} + \overline{GA} = \overline{MA}$ şi analoagele acesteia. Se ţine cont că pentru centrul de greutate avem $\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC} = \overline{0}$.

Problema 2.3.3 *Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ şi respectiv $B_1, B_2, ..., B_n$ puncte distincte din spaţiul afin real $\mathcal{A}$. Considerând punctele*

$$G = \frac{1}{n}A_1 + \frac{1}{n}A_2 + ... + \frac{1}{n}A_n$$

şi respectiv

$$G' = \frac{1}{n}B_1 + \frac{1}{n}B_2 + ...\frac{1}{n}B_n,$$

să se arate că

$$\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + ... + \overline{A_nB_n} = n\overline{GG'}.$$

În particular, două sisteme finite de puncte $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ şi $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ au acelaşi centru de greutate cu ponderile

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}$$

dacă şi numai dacă

$$\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + ... + \overline{A_nB_n} = \overline{0}.$$

R. Avem $\sum_{i=1}^{n} \overline{A_iB_i} = \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{OB_i} - \overline{OA_i}\right] = n\overline{OG'} - n\overline{OG} = n\overline{GG'}$.

Problema 2.3.4 *Fie A, B, C trei puncte afin independente şi E, F, G punctele ce împart vectorii $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ şi respectiv $\overline{CA}$ în rapoartele a, b şi c. Să se arate că o condiţie necesară şi suficientă ca punctele E, F, G să fie afin dependente este ca $a \cdot b \cdot c = -1$ (**Teorema lui Menelaus**).*

Ind. Se folosesc relaţia

$$\overline{OE} = \frac{1}{a+1}\overline{OA} + \frac{a}{a+1}\overline{OB}$$

şi analoagele acesteia pentru punctele F şi G, vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{BC}$ şi rapoartele corespunzătoare b şi c.

Problema 2.3.5 *Fie A, B, C trei puncte afin independente şi E (respectiv F) un punct coliniar cu A şi C (respectiv A şi B), astfel încât dreptele afine generate de sistemele de puncte $\{B, E\}$ şi $\{C, F\}$ să aibă un punct comun D. Să se arate că punctele*

$$X = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D,\ Y = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}F \text{ şi } Z = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$$

*sunt afin dependente (**Dreapta Newton-Gauss**).*

Problema 2.3.6 *Să se arate că în orice triunghi:*

a) medianele; b) înălţimile; c) bisectoarele; d) mediatoarele sunt concurente.

Problema 2.3.7 *Dacă în triunghiul $\triangle ABC$ notăm cu G - centrul de greutate, H - ortocentrul şi O centrul cercului circumscris triunghiului, atunci are loc* ***relaţia lui Euler*** $\overline{GH} = 2\overline{OG}$.

Problema 2.3.8 *Într-un tetraedru $ABCD$ muchiile opuse sunt perpendiculare două câte două dacă şi numai dacă*

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}.$$

Ind. Folosind egalitatea triunghiului, se arată că relaţia $\overline{AB} \cdot \overline{DC} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}$ este echivalentă cu $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$. Analog, se obţin celelalte echivalenţe.

Problema 2.3.9 *Dreptele care unesc mijloacele muchiilor opuse ale unui tetraedru sunt concurente.*

Problema 2.3.10 *În spaţiul afin canonic $\mathbb{R}^3$ se consideră punctul $O\,(2,-1,3)$ şi sistemul de puncte*

$$R = \{E_0 = (1,-2,-3)\,,\ E_1 = (1,1,-5)\,,\ E_2 = (-2,-1,3)\,,\ E_4 = (6,1,2)\}\,.$$

a) Să se scrie reperul cartezian $\mathcal{R}'$ cu originea în $O' = E_0$, asociat sistemului de puncte R.

b) Să se determine schimbarea de coordonate la trecerea de la reperul $\mathcal{R}'$ la reperul $\mathcal{R}'' = \{O'' = O;\ e_1'',\ e_2'',\ e_3''\}$ unde

$$e_1'' = (1,2,0)\,,\ e_2'' = (0,1,2)\,,\ e_3'' = (2,0,1)$$

şi să se indice translaţia şi centro-afinitatea prin care se realizează această schimbare de reper.

R. a) $\mathcal{R}' = \{O' = E_0\,(1,-2,-3)\,;\, e_1' = \overline{E_1E_0} = (0,3,-2),\ e_2' = \overline{E_2E_0} = (-3,1,6),\ e_3' = \overline{E_3E_0} = (5,3,5)\}$.

b) Transformarea de coordonate este $X' = C \cdot X'' + A$, unde

$$X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix},\ X'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix},$$

$$C = \frac{1}{163}\begin{pmatrix} 77 & 17 & -40 \\ -1 & 40 & -27 \\ 32 & 24 & 49 \end{pmatrix},\ A = \frac{1}{163}\begin{pmatrix} -52 \\ 79 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Problema 2.3.11 *Fie $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ doi vectori perpendiculari având normele* $\|\overline{a}\| = 3$, $\|\overline{b}\| = 4$. *Să se calculeze* $\left\|\left(3\overline{a} - \overline{b}\right) \times \left(\overline{a} - 2\overline{b}\right)\right\|$.

R. 60.

Problema 2.3.12 *Fie $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$ trei vectori necoplanari. Să se studieze liniar independenţa vectorilor*

$$\begin{cases} \overline{a} = 2\overline{m} - 3\overline{n} + \overline{p} \\ \overline{b} = \overline{m} + \overline{n} + 2\overline{p} \\ \overline{c} = \overline{m} - \overline{n}. \end{cases}$$

R. Liniar independenţi: $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -4(\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}) \neq 0$.

Problema 2.3.13 *Dacă $\overline{a}'$, $\overline{b}'$, $\overline{c}'$ sunt reciprocii vectorilor $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, atunci se cer:*

a) *Să se exprime produsul mixt $(\overline{a}', \overline{b}', \overline{c}')$ în funcţie de produsul mixt $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$; În ce condiţii vectorii $\overline{a}', \overline{b}', \overline{c}'$ sunt coplanari?*

b) Să se demonstreze că volumul tetraedrului construit pe vectorii liberi $\overline{a}' \times (\overline{a} \times \overline{b})$, $\overline{b}' \times (\overline{b} \times \overline{c})$, $\overline{c}' \times (\overline{c} \times \overline{a})$ este egal cu volumul tetraedrului construit pe $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$;

c) Să se deducă egalitatea $\overline{a}' \times (\overline{a} \times \overline{b}) = \overline{c}' \times (\overline{c} \times \overline{b})$.

R. $(\overline{a}', \overline{b}', \overline{c}') = \dfrac{1}{(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})}$. b) Folosind formula dublului produs vectorial, obţinem

$$\overline{a}' \times (\overline{a} \times \overline{b}) = -\overline{b},\ \overline{b}' \times (\overline{b} \times \overline{c}) = -\overline{c},\ \overline{c}' \times (\overline{c} \times \overline{a}) = -\overline{a}.$$

Problema 2.3.14 *Se dau vectorii $\overline{v}_1 = a\overline{j} - b\overline{k}$, $\overline{v}_2 = -a\overline{i} - c\overline{k}$, $\overline{v}_3 = b\overline{i} - c\overline{j}$. Să se calculeze: $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$, $\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3)$ şi $\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3$.*

R. $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3) = -2abc$. b) $\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3) = c(a-b)(a+b)\overline{i} + bc^2\overline{j} + ac^2\overline{k}$. c) $\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3 = (b-a)\overline{i} + (a-c)\overline{j} - (b+c)\overline{k}$.

Problema 2.3.15 *Se consideră punctele $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$. Să se arate că aria triunghiului ABC este cel mult egală cu $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^4 + b^4 + c^4}$. În ce condiţii are loc egalitatea?*

R. $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$. Aplicăm inegalitatea Cauchy. Avem egalitate pentru $a^2 = b^2 = c^2$.

Problema 2.3.16 *Să se calculeze aria şi înălţimile din triunghiul $\triangle ABC$ determinat de punctele $A(1, -2, 1)$, $B(2, 1, -1)$, $C(3, 2, -6)$.*

R. $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{182}}{2}$; $h_A = \sqrt{\dfrac{182}{27}}$; $h_B = \sqrt{\dfrac{182}{69}}$; $h_C = \sqrt{\dfrac{182}{14}}$.

Problema 2.3.17 *Să se calculeze volumul tetraedrului $ABCD$ şi înălţimile acestuia, unde $A(1, -5, 4)$, $B(0, -3, 1)$, $C(-2, -4, 3)$, $D(4, 4, -2)$.*

R. $V_{ABCD} = 15/2$; $h_A = 3$. Folosind formula volumului unui tetraedru, se calculează şi celelalte înălţimi.

Problema 2.3.18 *Se dau vectorii $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$ necoplanari şi $\overline{u} = \overline{p} - 2\overline{q} + 3\overline{r}$, $\overline{v} = \alpha\overline{p} - \overline{q} + \overline{r}$, $\overline{w} = 3\overline{p} + \overline{q} - \overline{r}$.*

a) *Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de volume*

$$V_{(\overline{u},\overline{v},\overline{w})} = 5V_{(\overline{p},\overline{q},\overline{r})}.$$

b) *În cazul când $\alpha = 2$ şi vectorii $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$ formează un tetraedru regulat de latură l, să se determine unghiul φ dintre vectorul $\overline{u}$ şi planul determinat de $\overline{v}$ şi $\overline{w}$.*

R. a) $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -8$. b) $\varphi = \pi/4$.

Problema 2.3.19 *Dacă $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) \neq 0$, atunci să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \overline{x} \cdot \overline{a} = 0 \\ \overline{x} \cdot \overline{b} = 0 \\ \overline{x} \cdot \overline{c} = 1. \end{cases}.$$

R. $\overline{x} = \dfrac{\overline{a} \times \overline{b}}{\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)}$.

Problema 2.3.20 *Fie sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} \overline{x} \times (\overline{y} \times \overline{a}) = \overline{b} \\ \overline{y} \times \left(\overline{x} \times \overline{b}\right) = \overline{a}, \end{cases}$$

unde $\overline{a} \times \overline{b} \neq \overline{0}$.

a) *Să se arate că sistemul are soluţii dacă şi numai dacă* $\|\overline{a}\| = \left\|\overline{b}\right\|$ *şi să se rezolve în acest caz.*

b) *Dacă* $\overline{a} \perp \overline{b}$*, atunci* $\overline{x} \perp \overline{y}$*. Reciproca este adevărată?*

R. a) Pentru $\|\overline{a}\| = \left\|\overline{b}\right\|$, soluţiile sistemului sunt

$$\overline{x} = \alpha \left[\overline{a} - \frac{\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle}{||\overline{a}||^2} \cdot \overline{b}\right] \text{ şi } \overline{y} = \beta \left[\overline{b} - \frac{\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle}{||\overline{a}||^2} \cdot \overline{a}\right],$$

unde

$$\alpha \cdot \beta = \frac{||\overline{a}||^2}{||\overline{a} \times \overline{b}||^2}.$$

Capitolul 3

Geometrie analitică în spaţiu

3.1 Elemente teoretice fundamentale

§1. Planul în spaţiu

În spaţiul geometriei euclidiene E_3, un plan este determinat în mod unic de următoarele condiţii:

1. un punct şi o dreaptă perpendiculară pe plan;
2. un punct şi două drepte neparalele;
3. trei puncte necoliniare.

Fie $A(x_0, y_0, z_0)$ un punct în spaţiu şi fie $\overline{n}(A, B, C)$ un vector nenul din spaţiu. Atunci, există un unic plan π care trece prin punctul A şi este perpendicular pe direcţia $\overline{n}$.

Propoziţia 3.1.1 *Ecuaţia planului π determinat de punctul $A(x_0, y_0, z_0)$ şi direcţia normală $\overline{n}(A, B, C)$ este*

$$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Observaţia 3.1.2 *Dacă efectuăm înmulţirile în ecuaţia precedentă, deducem că **ecuaţia generală a unui plan** este*

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Evident, normala la planul π este determinată de vectorul $\overline{n}(A, B, C)$.

Fie $A(x_0, y_0, z_0)$ un punct în spaţiu şi fie $\overline{v}_1(l_1, m_1, n_1)$, $\overline{v}_2(l_2, m_2, n_2)$ doi vectori necoliniari din spaţiu. Atunci, există un unic plan π care trece prin punctul A şi este paralel cu vectorii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$.

Propoziţia 3.1.3 *Ecuaţia planului π determinat de punctul A şi direcţiile $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ este*

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Fie $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ şi $C(x_3, y_3, z_3)$ trei puncte necoliniare. Atunci, există un unic plan $\pi = (ABC)$ determinat de cele trei puncte.

Propoziţia 3.1.4 *Ecuaţia planului π determinat de punctele A, B şi C este*

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Observaţia 3.1.5 *Patru puncte $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, 4}$, sunt coplanare dacă şi numai dacă*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

§2. Dreapta în spaţiu

În spaţiul geometric E_3, o dreaptă este unic determinată de următoarele condiţii:

1. un punct şi o direcţie dată;
2. două puncte distincte;
3. intersecţia a două plane.

Fie $A(x_0, y_0, z_0)$ un punct în spaţiu şi fie $\overline{v}(l, m, n)$ un vector nenul din spaţiu. Atunci, există o unică dreaptă d care trece prin punctul A şi este paralelă cu direcţia $\overline{v}$.

Propoziţia 3.1.6 ***Ecuaţiile carteziene*** *ale dreptei d determinată de punctul $A(x_0, y_0, z_0)$ şi direcţia $\overline{v}(l, m, n)$ sunt*

$$d : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \ (= t).$$

Observaţia 3.1.7 *i) Rapoartele care apar au un caracter formal, în sensul că dacă un numitor este egal cu zero, atunci şi numărătorul corespunzător este egal cu zero.*

ii) Dacă egalăm rapoartele precedente cu $t \in \mathbb{R}$, atunci găsim ***ecuaţiile parametrice*** *ale dreptei*

$$d : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Fie $A(x_1, y_1, z_1)$ şi $B(x_2, y_2, z_2)$ două puncte distincte. Atunci, există o unică dreaptă $d = (AB)$ determinată de cele două puncte.

Propoziţia 3.1.8 *Ecuaţiile dreptei d determinate de punctele A şi B sunt*

$$d : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Din geometria elementară se ştie că două plane neparalele se intersectează după o dreaptă. Prin urmare, o dreaptă în spaţiu d poate fi privită ca intersecţia a două plane neparalele π_1 şi π_2, adică ea este determinată de ecuaţiile

$$d = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ (\pi_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \ (\pi_2). \end{cases}$$

Observaţia 3.1.9 *Vectorul $\overline{v} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2$, unde $\overline{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ şi $\overline{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ sunt normalele la planele π_1 şi π_2, reprezintă vectorul director al dreptei $d = \pi_1 \cap \pi_2$.*

Definiţia 3.1.1 *i) Mulţimea tuturor planelor de ecuaţie*

$$\pi_{\lambda,\mu} : \lambda\,(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu\,(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, se numeşte ***fascicolul de plane*** *determinat de planele π_1 şi π_2.*

ii) Mulţimea tuturor planelor de ecuaţie

$$\pi_\lambda : Ax + By + Cz + \lambda = 0,$$

unde $\lambda \in \mathbb{R}$, reprezintă ***fascicolul de plane paralele*** *cu planul $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$.*

Observaţia 3.1.10 *Fascicolul de plane* $\pi_{\lambda,\mu}$ *reprezintă toate planele din spaţiu care trec prin dreapta* $d = \pi_1 \cap \pi_2$.

§3. Unghiuri în spaţiu

Să considerăm două drepte orientate în spaţiu, de ecuaţii

$$d_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ şi } d_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

ale căror orientări sunt date de vectorii $\overline{v}_1(l_1, m_1, n_1)$ şi $\overline{v}_2(l_2, m_2, n_2)$.

Definiţia 3.1.2 *Unghiul dintre dreptele orientate* d_1 *şi* d_2 *este definit de formula*

$$\cos\theta = \frac{\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2}{||\overline{v}_1|| \cdot ||\overline{v}_2||} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}, \ \theta \in [0, \pi].$$

Observaţia 3.1.11 *i)* $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = 0 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

ii) $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \overline{0} \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$.

Fie două plane π_1 şi π_2 orientate în spaţiu, determinate de ecuaţiile

$$\begin{aligned} \pi_1 &: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ \pi_2 &: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{aligned}$$

ale căror orientări sunt date de vectorii normali $\overline{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ şi $\overline{n}_2(A_2, B_2, C_2)$.

Definiţia 3.1.3 *Unghiul dintre planele orientate* π_1 *şi* π_2 *este definit de formula*

$$\cos\theta = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{||\overline{n}_1|| \cdot ||\overline{n}_2||} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \ \theta \in [0, \pi].$$

Observaţia 3.1.12 *i)* $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

ii) $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \overline{0} \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Fie $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ un plan orientat cu direcţia normală $\overline{n}(A, B, C)$ şi fie o dreaptă

$$d : \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},$$

orientată de vectorul $\overline{v}(l, m, n)$.

Definiţia 3.1.4 *Unghiul dintre dreapta orientată d şi planul orientat π este definit de formula*

$$\cos\theta = \frac{\overline{v}\cdot\overline{n}}{||\overline{v}||\cdot||\overline{n}||} = \frac{lA+mB+nC}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \theta\in[0,\pi].$$

Observaţia 3.1.13 *i)* $d\perp\pi \Leftrightarrow \overline{v}\times\overline{n}=0 \Leftrightarrow \frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}$.
ii) $d\parallel\pi \Leftrightarrow \overline{v}\cdot\overline{n}=0 \Leftrightarrow lA+mB+nC=0$.

§4. Distanţe în spaţiu

Fie $A(x_1,y_1,z_1)$ şi $B(x_2,y_2,z_2)$ două puncte în spaţiu.

Propoziţia 3.1.14 *Distanţa dintre punctele A şi B este dată de formula*

$$\delta(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Fie $A(x_0,y_0,z_0)$ un punct în spaţiu şi fie un plan $\pi: Ax+By+Cz+D=0$.

Propoziţia 3.1.15 *Distanţa de la punctul A la planul π este dată de formula*

$$\delta(A,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Fie $A(x_0,y_0,z_0)$ un punct în spaţiu şi fie o dreaptă

$$d: \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n},$$

determinată de punctul $A_1(x_1,y_1,z_1)$ şi direcţia $\overline{v}(l,m,n)$.

Propoziţia 3.1.16 *Distanţa de la punctul A la dreapta d este dată de formula*

$$\delta(A,d)=\frac{||\overline{AA_1}\times\overline{v}||}{||\overline{v}||},$$

unde $\overline{AA_1}(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$.

Să considerăm două drepte în spaţiu, de ecuaţii

$$d_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ şi } d_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

care trec prin punctele $A_1(x_1,y_1,z_1)\in d_1$ şi $A_2(x_2,y_2,z_2)\in d_2$ şi ale căror direcţii sunt date de vectorii $\overline{v}_1(l_1,m_1,n_1)$ şi $\overline{v}_2(l_2,m_2,n_2)$.

Propoziţia 3.1.17 *Distanţa dintre dreptele d_1 şi d_2 este dată de formula*

$$\delta(d_1, d_2) = \frac{|(\overline{A_1A_2}, \overline{v}_1, \overline{v}_2)|}{||\overline{v}_1 \times \overline{v}_2||},$$

unde $\overline{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

3.2 Probleme rezolvate

Problema 3.2.1 *Se dau punctele* $A\,(3,1,0)\,,\ B\,(2,1,-1)\,,\ C\,(3,2,1)$. *Să se scrie ecuaţia unui plan:*

a) *care trece prin* A, B, C;

b) *care trece prin* B *şi este paralel cu* xOy;

c) *care trece prin* C *şi conţine axa* Oz;

d) *care trece prin* B, C *şi este paralel cu* Oy.

Rezolvare. a) Ecuaţia planului care trece prin A, B, C este

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0,$$

adică

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y - 1 & z \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 4 = 0.$$

b) Planul căutat are drept normală vectorul $\overline{k}(0,0,1)$. Prin urmare, ecuaţia planului căutat este $z + 1 = 0$.

c) Planul conţine orice două puncte de pe axa Oz. Alegem, pentru comoditate, punctele $O\,(0,0,0)$ şi $M\,(0,0,1)$. Atunci ecuaţia planului cerut este

$$\begin{vmatrix} x - x_O & y - y_O & z - z_O \\ x_M - x_O & y_M - y_O & z_M - z_O \\ x_C - x_O & y_C - y_O & z_C - z_O \end{vmatrix} = 0,$$

adică

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y = 0.$$

d) Planul căutat este determinat de punctul B şi direcţiile $\overline{BC}(1,1,2)$ şi $\overline{\jmath}(0,1,0)$. Prin urmare, ecuaţia planului căutat este

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - z - 5 = 0.$$

■

Problema 3.2.2 *Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul* $M(2,0,1)$ *şi care este perpendicular pe planele* $\pi_1 : x + y + z = 0$ *şi* $\pi_2 : x - 2y + 3z = 1$.

Rezolvare. Fie π planul căutat. Deoarece planul π este perpendicular pe π_1 şi π_2, rezultă că el este paralel cu normalele la acestea, şi anume, $\overline{n}_1(1,1,1)$ şi $\overline{n}_2(1,-2,3)$. Astfel, planul π este planul determinat de punctul M şi direcţiile $\overline{n}_1$ şi $\overline{n}_2$, adică

$$\pi : \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y - 3z - 7 = 0.$$

■

Problema 3.2.3 *Să se scrie ecuaţia unui plan paralel cu planul*

$$(P) : x + y + z = 3$$

şi care trece prin mijlocul segmentului determinat de punctele $M_1(1,3,2)$ *şi* $M_2(-1,3,4)$.

Rezolvare. Mijlocul segmentului M_1M_2 este punctul $M(0,3,3)$. Planul căutat va avea aceeaşi normală cu (P), deci ecuaţia sa este

$$1 \cdot (x-0) + 1 \cdot (y-3) + 1 \cdot (z-3) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 6 = 0.$$

■

Problema 3.2.4 *Fie planul definit parametric prin*

$$\begin{cases} x = -2 + 3\lambda u - 4v \\ y = 1 - 2u + \mu v \qquad u, v \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - \mu u + \lambda v, \end{cases}$$

a) *Să se găsească* λ *şi* $\mu \in \mathbb{R}$ *astfel încât planul să fie ortogonal pe vectorul* $\overline{v}\,(1,7,11)$.

b) *Pentru valorile* λ *şi* μ *găsite să se scrie ecuaţia generală a planului.*

Rezolvare. a) Vectorul $\overline{v}$ trebuie să fie ortogonal pe orice direcţie conţinută în planul dat. În consecinţă, vectorul $\overline{v}$ este ortogonal pe vectorul arbitrar $\overline{M_0M}$, unde $M_0\,(-2,1,1)$ şi

$$M\,(-2+3\lambda u-4v, 1-2u+\mu v, 1-\mu u+\lambda v)\,.$$

Deducem că

$$\overline{v}\perp\overline{M_0M}\,(3\lambda u-4v,-2u+\mu v,-\mu u+\lambda v)\,,\ \forall\ u,v\in\mathbb{R},$$

adică

$$1\cdot(3\lambda u-4v)+7\cdot(-2u+\mu v)+11\cdot(-\mu u+\lambda v)=0,\ \forall\ u,v\in\mathbb{R}.$$

Ultima egalitate conduce la sistemul

$$\begin{cases} 3\lambda-11\mu-14=0 \\ 11\lambda+7\mu-4=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda=1,\ \mu=-1.$$

b) Ecuaţiile parametrice devin

$$\begin{cases} x=-2+3u-4v \\ y=1-2u-v \qquad u,v\in\mathbb{R}. \\ z=1+u+v, \end{cases}$$

Pentru a scrie ecuaţia generală a planului, se elimină u şi v din ecuaţiile anterioare. Obţinem ecuaţia $x+7y+11z-16=0$ ■

Problema 3.2.5 *Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin* $M\,(1,-1,1)$ *şi este paralelă cu dreapta de intersecţie a planelor* $(P_1): x+y=3$ *şi* $(P_2): x-z=1$.

Rezolvare. Dreapta de intersecţie a planelor (P_1) şi (P_2) are drept vector director produsul vectorial $\overline{v}=\overline{n}_1\times\overline{n}_2$ al normalelor la cele două plane (deoarece este perpendiculară pe ambele). Avem

$$\overline{v}=\overline{n}_1\times\overline{n}_2=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}.$$

Dreapta căutată are drept vector director pe $\overline{v}$ şi conţine punctul M, deci ecuaţiile ei sunt

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-1}.$$

■

Problema 3.2.6 *Găsiţi* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *astfel încât dreapta*

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y-\beta}{1}=\frac{z}{2}$$

să fie conţinută în planul $x-z=0$ *şi să treacă prin* $M\left(1,1,1\right)$.

Rezolvare. O condiţie necesară pentru ca dreapta să fie conţinută în plan este ca vectorul ei director $\overline{v}$ să fie perpendicular pe normala $\overline{n}(1,0,-1)$ la plan, ceea ce se scrie ca $\overline{v}\cdot\overline{n}=0$ şi conduce la $\alpha=2$.

Înlocuind coordonatele lui M în ecuaţiile dreptei, găsim $\beta=1/2$.

Observaţie. O altă cale de rezolvare este aceea de a pune condiţia ca sistemul format cu ecuaţiile dreptei şi planului să admită o infinitate de soluţii. ■

Problema 3.2.7 *Să se scrie ecuaţia planului care trece prin* $M_0\left(2,-1,1\right)$ *şi este perpendicular pe dreapta definită de planele* $(P_1):x+2y+2z+2=0$ *şi* $(P_2):x-y+z+1=0$.

Rezolvare. Planul căutat are drept normală dreapta (D) de intersecţie dintre (P_1) şi (P_2). Însă vectorul director al dreptei (D) este

$$\overline{v}=\begin{vmatrix}\overline{i}&\overline{j}&\overline{k}\\1&2&2\\1&-1&1\end{vmatrix}=4\overline{i}+\overline{j}-3\overline{k}.$$

În concluzie, ecuaţia planului căutat este

$$4\cdot(x-2)+1\cdot(y+1)-3\cdot(z-1)=0\Leftrightarrow 4x+y-3z-4=0.$$

■

Problema 3.2.8 *Să se scrie ecuaţia planului care trece prin mijlocul segmentului* MN, *unde* $M\left(1,-1,2\right)$, $N\left(4,-3,1\right)$, *este paralel cu dreapta*

$$(d):\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=z$$

şi este perpendicular pe planul $(P):x-2y-z-1=0$.

Rezolvare. Mijlocul segmentului MN este punctul $Q(5/2, -2, 3/2)$. Planul căutat va conţine vectorul director al dreptei (d) şi normala la (P), adică are ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x-5/2 & y+2 & z-3/2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x+3y-7z+19=0.$$

■

Problema 3.2.9 *Să se scrie ecuaţiile dreptei care este conţinută în planul* $(P) : x+3y+2z-2=0$, *se sprijină pe dreapta* $(d) : x=y=z$ *şi este paralelă cu planul* $(P') : 4x-y-z-3=0$.

Rezolvare. Dreapta căutată va avea ca vector director produsul vectorial al normalelor la cele două plane, şi anume

$$\overline{v} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\overline{i} + 9\overline{j} - 13\overline{k}.$$

Prin urmare, ecuaţiile dreptei pot fi scrise sub forma

$$\frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y-\beta}{9} = \frac{z}{-13}.$$

Din condiţia ca sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{-1} = \dfrac{y-\beta}{9} = \dfrac{z}{-13} \\ x=y=z \end{cases}$$

să fie compatibil, găsim ecuaţia $11\alpha - 6\beta = 0$.

Pe de altă parte, condiţia ca dreapta să fie conţinută în planul (P) implică relaţia $\alpha + 3\beta - 2 = 0$. Rezolvând sistemul, obţinem $\alpha = 4/13$ şi $\beta = 22/39$.
■

Problema 3.2.10 *Să se scrie planul care trece prin punctul* $A(3, 1, -2)$ *şi care conţine dreapta*

$$d : \frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}.$$

Rezolvare. Dreapta d este intersecţia planelor

$$d : \begin{cases} x - 5z - 4 = 0 \\ y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

Fascicolul de plane care trece prin dreapta d este

$$\pi_\lambda : x - 5z - 4 + \lambda (y - 2z + 3) = 0, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Condiţia $A \in \pi_\lambda$ implică $\lambda = -9/8$. Ecuaţia planului căutat este

$$\pi_{\lambda=-9/8} : 8x - 9y - 22z - 59 = 0.$$

■

Problema 3.2.11 *Fie punctul $M(2, 1, 0)$ şi planul $(P) : 2x + 2y + z = -3$. Să se determine:*

a) *proiecţia lui M pe plan;*

b) *simetricul lui M faţă de plan;*

c) *distanţa de la M la planul (P).*

Rezolvare. a) Perpendiculara din punctul M pe planul (P) este

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}.$$

Proiecţia M' a punctului M pe planul (P) se obţine din intersecţia acesteia cu (P). Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1} \\ 2x + 2y + z = -3, \end{cases}$$

găsim $M'(0, -1, -1)$.

b) Coordonatele simetricului M'' al punctului M faţă de plan se obţin din relaţiile

$$x_{M'} = \frac{x_M + x_{M"}}{2}, \ y_{M'} = \frac{y_M + y_{M"}}{2}, \ z_{M'} = \frac{z_M + z_{M"}}{2}.$$

Prin urmare avem simetricul $M''(-2, -3, -2)$.

c) Distanţa *de la punctul M la planul (P) este*

$$\delta(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3.$$

■

Problema 3.2.12 *Să se afle coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului $M(1,1,1)$ pe dreapta*

$$(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+12}{-1}.$$

Rezolvare. Fie $M'(\alpha, \beta, \gamma)$ proiecţia punctului M pe dreapta (d). Deoarece $M' \in (d)$, obţinem relaţiile

$$\frac{\alpha-1}{2} = \frac{\beta+1}{2} = \frac{\gamma+12}{-1}.$$

Vectorul $\overline{MM'}(\alpha-1, \beta-1, \gamma-1)$ este perpendicular pe vectorul director al dreptei (d). Prin urmare, avem

$$\overline{MM'} \perp \overline{v} \Leftrightarrow \overline{MM'} \cdot \overline{v} = 0 \Leftrightarrow 2(\alpha-1) + 2(\beta-1) - (\gamma-1) = 0.$$

Rezolvând sistemul, găsim $\alpha = -1$, $\beta = -3$, $\gamma = -11$. ∎

Problema 3.2.13 *Să se scrie ecuaţia unui plan care trece prin dreapta*

$$(D): \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$$

şi care este perpendicular pe planul $(P): x+y+z=0$.

Rezolvare. Planul căutat va conţine vectorul director al dreptei (D) şi normala la (P) şi va trece prin orice punct al dreptei (D), spre exemplu, prin punctul $A(1,1,2)$. Prin urmare, ecuaţia planului căutat este

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + 2y - z + 1 = 0.$$

∎

Problema 3.2.14 *Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin $A(3,1,-1)$ şi se sprijină pe dreptele*

a) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{3} = z-1$ *şi* $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{4}$;

b) $\begin{cases} x-1=0 \\ x+3y-z=3 \end{cases}$ *şi* $x=-t$, $y=2t+1$, $z=3t$, $t \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Totalitatea dreptelor care trec prin punctul A este dată de familia de drepte

$$d_{\lambda\mu} : \begin{cases} x-3=\lambda\,(y-1) \\ x-3=\mu\,(z+1)\,, \end{cases} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

a) Din condiţia ca sistemele

$$\begin{cases} x-3=\lambda\,(y-1) \\ x-3=\mu\,(z+1) \\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{3}=z-1 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x-3=\lambda\,(y-1) \\ x-3=\mu\,(z+1) \\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{4} \end{cases}$$

să fie compatibile, se găsesc două ecuaţii din care rezultă λ şi μ.

b) Cazul al doilea se tratează analog.

Observaţie. Scriind fascicolele de plane determinate de prima, respectiv, a doua dreaptă, obţinem ecuaţiile unei drepte oarecare care se sprijină pe cele două drepte date, adică

$$d_{\lambda\mu} : \begin{cases} x+\lambda y-(1+3\lambda)z+1+\lambda=0 \\ (1+2\mu)x+y-\mu z+1+2\mu=0, \end{cases}$$

unde $\lambda,\mu\in\overline{\mathbb{R}}$. Impunând condiţia $A\in d_{\lambda\mu}$, obţinem dreapta dorită. ■

Problema 3.2.15 *Să se găsească pe dreapta*

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 3x-y+4z-29=0 \end{cases}$$

un punct egal depărtat de punctele $A\,(0,0,0)$ *şi* $B\,(2,1,2)$.

Rezolvare. Punctul căutat se găseşte la intersecţia dreptei date cu planul mediator al segmentului AB. Planului mediator al segmentului AB este planul care trece prin mijlocul $M(1,1/2,1)$ al segmentului AB şi are direcţia normală $\overline{AB}(2,1,2)$, deci are ecuaţia

$$2(x-1)+1\cdot\left(y-\frac{1}{2}\right)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow 4x+2y+4z-9=0.$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 3x-y+4z-29=0 \\ 4x+2y+4z-9=0, \end{cases}$$

găsim punctul $P(-25/2,-5/2,16)$. ■

Problema 3.2.16 *Să se calculeze distanţa de la punctul $A(1,2,2)$ la dreapta*

$$(d) : \frac{x-1}{-5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{3}.$$

Rezolvare. Punctul $A_1(1,-1,-1)$ aparţine dreptei (d) iar $\overline{v}(-5,3,3)$ este vectorul director al dreptei. Rezultă că

$$\overline{AA_1} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & -3 & -3 \\ -5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 15\overline{j} - 15\overline{k}.$$

Prin urmare, distanţa de la punctul A la dreaptă este

$$\delta(A,(d)) = \frac{\sqrt{225+225}}{\sqrt{25+9+9}} = \frac{\sqrt{450}}{\sqrt{43}} = 5\sqrt{\frac{18}{43}}.$$

■

Problema 3.2.17 *Să se scrie ecuaţia perpendicularei comune a dreptelor*

$$(d_1) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0} \text{ şi } (d_2) : \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

Rezolvare. Perpendiculara comună a lui (d_1) şi (d_2) se găseşte la intersecţia dintre planul determinat de A_1, $\overline{v}_1$, $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2$ şi planul determinat de A_2, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2$. Deoarece avem

$$\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} - 2\overline{j} + 5\overline{k},$$

rezultă că ecuaţiile perpendicularei comune sunt

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z + 5 = 0 \\ 2x + y = 0. \end{array} \right.$$

■

Problema 3.2.18 *Să se calculeze distanţa dintre dreptele*

$$(d_1): \begin{cases} x+y=4 \\ x-2y+z=-5 \end{cases} \quad \text{și } (d_2): \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{0}.$$

Rezolvare. Direcţiile dreptelor (d_1) şi (d_2) sunt $\overline{v}_1(1,-1,-3)$ şi $\overline{v}_2(1,2,0)$ iar produsul lor vectorial este

$$\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6\overline{i} - 3\overline{j} + 3\overline{k}.$$

Punctul $A_1(1,3,0)$ aparţine dreptei (d_1) şi punctul $A_2(2,3,0)$ aparţine dreptei (d_2). Produsul mixt al vectorilor $\overline{A_1A_2}$, $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ este

$$\left(\overline{A_1A_2}, \overline{v}_1, \overline{v}_2\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6,$$

ceea ce implică

$$\delta((d_1),(d_2)) = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

■

Problema 3.2.19 *Să se determine α şi $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât planele*

$$\begin{aligned} (\pi_1) &: x+2y-z=\alpha, \\ (\pi_2) &: \alpha x = 3, \\ (\pi_3) &: x+\beta y + z = 0 \end{aligned}$$

a) *să se intersecteze după o dreaptă;*

b) *să se intersecteze într-un punct;*

c) *să formeze o prismă.*

Rezolvare. a) Trebuie ca sistemul

$$\begin{cases} x+2y-z=\alpha \\ \alpha x = 3 \\ x+\beta y+z=0 \end{cases}$$

să fie compatibil simplu nedeterminat, adică

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ \alpha & 0 & 3 \\ 1 & \beta & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\beta+2) = 0 \\ \alpha^2\beta - 3\beta + 6 = 0. \end{cases}$$

Rezultă $\alpha = 0$ şi $\beta = 2$ (Nu convin! De ce?) sau $\alpha = \pm\sqrt{6}$ şi $\beta = -2$.

b)Sistemul de mai sus trebuie să fie compatibil determinat, adică

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \beta \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}.$$

c) Deoarece cele trei plane sunt două câte două neparalele, condiţia necesară şi suficientă ca ele să formeze o prismă este ca cele trei plane să nu aibă nici un punct comun, deci sistemul format cu ecuaţiile lor trebuie să fie incompatibil. Rezultă $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, \pm\sqrt{6}\}$ şi $\beta = -2$. ■

Problema 3.2.20 *Să se determine simetrica dreptei*

$$(d) : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

faţă de planul xOy.

Rezolvare. Pentru a determina simetrica dreptei (d) faţă de planul xOy, construim simetricele a două puncte de pe (d) faţă de acest plan. Pentru comoditate, unul dintre puncte îl alegem la intersecţia lui (d) cu xOy, adică $M\,(5, 1, 0)$ (deoarece simetricul lui M faţă de plan este tot M). Fie, acum, $N\,(1, 0, 2) \in (d)$. Simetricul lui N faţă de xOy este $N'\,(1, 0, -2)$ iar dreapta căutată este

$$N'M : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{2}.$$

■

3.3 Probleme propuse

Problema 3.3.1 *Să se determine ecuaţia planului care trece prin punctul* $M(-1,1,0)$ *şi taie pe axele de coordonate segmente cu lungimile proporţionale cu numerele 2,3,4.*

R. $6x+4y+3z+2=0$.

Problema 3.3.2 *Fie triunghiul* $\triangle AMC$ *determinat de punctele* $A(0,2,0)$, $M(3,2,1)$, $C(0,1,2)$. *Să se scrie ecuaţiile:*

a) *înălţimii din* A;

b) *medianei din* M;

c) *mediatoarei laturii* AM.

R. a) $\dfrac{x}{9}=\dfrac{y-2}{-8}=\dfrac{z}{19}$; b) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{2y-3}{1}=\dfrac{z-1}{0}$; c) $\begin{cases} 3x+z-5=0 \\ x-6y-3z+12=0. \end{cases}$

Problema 3.3.3 *Un mobil* M *se deplasează în spaţiu pe traiectoria dată de*

$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-t \\ z=t+3. \end{cases}$$

Să se determine momentul t *la care mobilul se află în planul* $x+y+z=0$ *şi să se scrie ecuaţiile carteziene ale acestei traiectorii.*

R. $t=-2$; $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

Problema 3.3.4 *Să se scrie ecuaţiile proiecţiei dreptei*

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{5}$$

pe planul $3x-2y+z-4=0$.

R. $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ 3x-2y+z-4=0. \end{cases}$

Problema 3.3.5 *Să se scrie ecuaţia unui plan care este paralel cu planul* $(P):3x+5y+z=0$ *şi care trece prin punctul* $M(2,0,5)$.

R. $3x + 5y + z - 11 = 0.$

Problema 3.3.6 *Să se afle coordonatele simetricului punctului $M(2, -1, -1)$ faţă de dreapta*

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}.$$

R. $M''(2/7, -4/7, 8/7)$.

Problema 3.3.7 *Fie dreapta*

$$(d) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$$

şi planul $(P) : 2x - y + z = 0$. Să se afle simetrica dreptei (d) pe planul (P).

R. $\frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{1}.$

Problema 3.3.8 *Să se scrie ecuaţiile proiecţiei ortogonale a dreptei*

$$(d) : \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

pe planul $(P) : 3x + 2y - z - 2 = 0$.

R. $\begin{cases} -7x + 13y + 5z + 3 = 0 \\ 3x + 2y - z - 2 = 0. \end{cases}$

Problema 3.3.9 *Să se găsească unghiul dintre dreptele*

$$(d_1) : \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{1} \text{ şi } (d_2) : \begin{cases} y = 3 \\ x + 2y + 2z = 1. \end{cases} .$$

R. $\cos\theta = -\sqrt{5}/3$.

Problema 3.3.10 *Calculaţi unghiul pe care îl face planul $2x+2y-z-3 = 0$ cu dreapta*

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}.$$

R. $\cos\theta = 2/15$.

Problema 3.3.11 *Să se afle unghiul dintre planele $(P) : x + y + 2z = 1$ şi $(Q) : 2x - y + 2z = 3$.*

R. $\cos\theta = 5\sqrt{6}/18$.

Problema 3.3.12 *Fie planul* $(P): x+y+z+1=0$ *şi dreapta*

$$(d): \begin{cases} x-y-3z+2=0 \\ 2x-y+2z-3=0. \end{cases}$$

a) *Să se scrie ecuaţia planului* (Q) *care trece prin dreapta* (d) *şi face un unghi de* 60° *cu planul* (P).

b) *Să se scrie ecuaţia planului* (R) *care trece prin dreapta* (d) *şi face un unghi de* 30° *cu dreapta*

$$(d_1): \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}.$$

R. a) $(Q_{1,2}): x-y-3z+2+\lambda_{1,2}(2x-y+2z-3)=0$, unde $\lambda_{1,2} = \dfrac{9\pm\sqrt{78}}{3}$.
b) $(R_{1,2}): x-y-3z+2+\lambda_{1,2}(2x-y+2z-3)=0$, unde $\lambda_{1,2} = \dfrac{51\pm 3\sqrt{70}}{73}$.

Problema 3.3.13 *Să se determine simetricul planului* $2x+y-2z=1$ *faţă de planul* $x+y+z=0$.

R. $-4x-y+8z+3=0$.

Problema 3.3.14 *Să se calculeze distanţa de la punctul* $M(3,-2,1)$ *la dreapta*

$$(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}.$$

R. $\delta(M,(d)) = 4\sqrt{21}/7$.

Problema 3.3.15 *Să se arate că dreptele*

$$(d_1): \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} \text{ şi } (d_2): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{2}$$

sunt oarecare în spaţiu şi să se determine distanţa dintre ele.

R. Dreptele nu sunt nici paralele nici concurente; $\delta((d_1),(d_2)) = 5/\sqrt{13}$.

Problema 3.3.16 *Să se afle locul geometric al dreptelor care se sprijină pe dreapta* $(d_1): x=y=z$ *şi sunt paralele cu dreapta*

$$(d_2): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

R. Locul geometric este planul $2x - y - z = 0$.

Problema 3.3.17 *Fie un triedru $OABC$ astfel încât*

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \frac{1}{k} > 0 \text{ (constant).}$$

Să se demonstreze că planul ABC trece printr-un punct fix.

R. Punctul fix este $P(k, k, k)$.

Problema 3.3.18 *Să se determine locul geometric al simetricelor punctelor planului $(P_1) : x + 2y = 0$ faţă de planul $(P_2) : 2x + z = 0$.*

R. Locul geometric este planul $3x - 10y + 4z = 0$.

Problema 3.3.19 *Să se arate că planele duse prin mijloacele muchiilor unui tetraedru şi perpendiculare pe ele sunt concurente.*

Capitolul 4

Transformări liniare

4.1 Elemente teoretice fundamentale

Fie V şi W două K-spaţii vectoriale.

Definiţia 4.1.1 *O aplicaţie* $T : V \to W$ *care verifică proprietăţile*

1. $T(v + w) = T(v) + T(w)$, $\forall\ v, w \in V$,
2. $T(\alpha v) = \alpha T(v)$, $\forall\ \alpha \in K$, $\forall\ v \in V$,

se numeşte ***transformare liniară*** *(**aplicaţie liniară**,* ***operator liniar*** *sau* ***morfism de spaţii vectoriale****).*

Propoziţia 4.1.1 *Aplicaţia* $T : V \to W$ *este o transformare liniară dacă şi numai dacă*

$$T(\alpha v + \beta w) = \alpha T(v) + \beta T(w),\ \forall\ \alpha, \beta \in K,\ \forall\ v, w \in V.$$

Observaţia 4.1.2 *i) Notăm cu* $\mathcal{L}_K(V, W)$ *mulţimea transformărilor liniare de la spaţiul vectorial* V *la spaţiul vectorial* W*.*

ii) O transformare liniară bijectivă $T : V \to W$ *se numeşte* ***izomorfism*** *de spaţii vectoriale.*

iii) Dacă $V = W$*, atunci aplicaţia liniară* $T : V \to V$ *se numeşte* ***endomorfism*** *al spaţiului vectorial* V *iar mulţimea acestora va fi notată cu* $End_K(V)$*.*

iv) Un endomorfism bijectiv $T : V \to V$ *se numeşte* ***automorfism*** *al spaţiului vectorial* V *iar mulţimea acestora va fi notată cu* $Aut_K(V)$*.*

Propoziţia 4.1.3 *Dacă* $T \in \mathcal{L}_K(V, W)$, *atunci*

1. $T(0_V) = 0_W$;
2. $T(-v) = -T(v)$, $\forall\ v \in V$.

Definiţia 4.1.2 *Fie* $T \in \mathcal{L}_K(V, W)$. *Mulţimea*

$$Ker\ T = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}$$

se numeşte ***nucleul*** *transformării liniare* T, *iar mulţimea*

$$\operatorname{Im} T = \{w \in W \mid \exists\ v \in V \ \textit{astfel încât}\ f(v) = w\}$$

se numeşte ***imaginea*** *transformării liniare* T.

Propoziţia 4.1.4 *Pentru orice* $T \in \mathcal{L}_K(V, W)$ *nucleul* $Ker\ T$ *este subspaţiu vectorial în* V *iar imaginea* $\operatorname{Im} T$ *este subspaţiu vectorial în* W.

Definiţia 4.1.3 *Dacă* $T \in \mathcal{L}_K(V, W)$, *atunci* $\dim_K Ker\ T = d$ *se numeşte* ***defectul*** *transformării liniare* T *iar* $\dim_K \operatorname{Im} T = r$ *se numeşte* ***rangul*** *transformării liniare* T.

Teorema 4.1.5 *Fie* $T \in \mathcal{L}_K(V, W)$. *Atunci:*

1. T *este injectivă* $\Leftrightarrow Ker\ T = \{0_V\}$;
2. T *este surjectivă* $\Leftrightarrow \operatorname{Im} T = W$;
3. $n = d + r$, *unde* $n = \dim_K V$ *(dacă* V *este finit dimensional).*

Fie $T \in End_K(V)$, $\dim_K V = n$, şi fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază în V. Deoarece $T(e_i) \in V$, $\forall\ i = \overline{1, n}$, avem descompunerile unice

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j,\ \forall\ i = \overline{1, n}.$$

Definiţia 4.1.4 *Matricea* $A \overset{not}{=} M_B(T) = (a_{ji})_{i,j=\overline{1,n}}$, *care are ca elemente scalarii* a_{ji} *(ce reprezintă coordonatele vectorilor* $T(e_i)$, $\forall\ i = \overline{1, n}$, *puse pe coloane), se numeşte* ***matricea endomorfismului*** T ***în baza*** B.

Fie $T \in End_K(V)$ un endomorfism şi fie $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ o altă bază în V. Fie $A = M_B(T) \in M_n(K)$ şi $A' = M_{B'}(T) \in M_n(K)$ matricile endomorfismului T în bazele B şi B' ale spaţiului vectorial V.

Teorema 4.1.6 *Legătura între A şi A' este dată de relaţia matriceală*

$$A' = C^{-1} \cdot A \cdot C,$$

unde matricea $C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este matricea de trecere de la baza B la în baza B'.

Fie V un K-spaţiu vectorial n-dimensional şi fie $T \in End_K(V)$ un endomorfism.

Definiţia 4.1.5 *Un scalar $\lambda \in K$ se numeş* ***valoare proprie*** *pentru endomorfismul T dacă*

$$\exists\ v \neq 0_V \ \textit{astfel încât}\ T(v) = \lambda v.$$

Vectorul $v \neq 0_V$ cu această proprietate se numeşte ***vector propriu corespunzător valorii proprii*** *$\lambda \in K$.*

Propoziţia 4.1.7 *Mulţimea*

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$$

este un subspaţiu vectorial al lui V, care se numeşte ***subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii*** *$\lambda \in K$.*

Observaţia 4.1.8 *Mulţimea valorilor proprii ale endomorfismului T se numeşte* ***spectrul*** *endomorfismului T şi se notează cu $\sigma(T)$.*

Fie $T \in End_K(V)$, $\dim_K V = n$, şi fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază în spaţiul vectorial V. Fie $A = M_B(T) = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K)$ matricea endomorfismului T în baza B.

Teorema 4.1.9 *Orice valoare proprie a endomorfismului T este o radăcină a* ***ecuaţiei caracteristice***

$$\det[A - \lambda I_n] = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

unde I_n este matricea identitate.

Observaţia 4.1.10 *Polinomul $P(\lambda) = \det[A - \lambda I_n]$ este independent de alegerea bazei B şi se numeşte* ***polinomul caracteristic al endomorfismului*** *T sau* ***polinomul caracteristic al matricii*** *A.*

Dacă $A \in M_n(K)$ este o matrice şi $f = a_0X^k + a_1X^{k-1} + ... + a_k \in K[X]$ este un polinom, atunci polinomul

$$f(A) = a_0A^k + a_1A^{k-1} + ... + a_kI_n$$

se numeşte *polinom de matrice*.

Teorema 4.1.11 (Hamilton-Cayley) *Dacă $P(\lambda) = \det[A - \lambda I_n]$ este polinomul caracteristic al matricii A, atunci avem*

$$P(A) = 0_n,$$

unde 0_n este matricea nulă.

Definiţia 4.1.6 *Un endomorfism $T : V \to V$ se numeşte* ***diagonalizabil*** *dacă există o bază $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ în spaţiul vectorial V astfel încât*

$$M_{B'}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix},$$

unde $\lambda_i \in K$, $\forall\ i = \overline{1, n}$.

Teorema 4.1.12 *Un endomorfism $T : V \to V$ este diagonalizabil dacă şi numai dacă are toate valorile proprii în corpul K şi dimensiunea fiecărui subspaţiu propriu este egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii corespunzătoare, privită ca rădăcină a polinomului caracteristic.*

Observaţia 4.1.13 *Orice matrice reală şi simetrică (i. e., $A = {}^TA$) este diagonalizabilă.*

Algoritm de diagonalizare a unui endomorfism (a unei matrici)

1. Se fixează o bază B a spaţiului vectorial finit dimensional V şi se scrie matricea $A = M_B(T)$ a endomorfismului T în baza B.

2. Se determină valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, cu multiplicităţile lor algebrice $m_1, m_2, ..., m_p \in \mathbb{N}$, rezolvând ecuaţia caracteristică

$$\det[A - \lambda I_n] = 0.$$

3. Se verifică dacă toate valorile proprii λ_j, $\forall\ j = \overline{1,p}$, aparţin corpului K. În caz contrar, se opreşte algoritmul şi se afirmă că endomorfismul T nu este diagonalizabil.

4. Pentru fiecare valoare proprie λ_j se calculează subspaţiul propriu asociat V_{λ_j} şi dimensiunea acestuia $d_j = \dim_K V_{\lambda_j}$ şi se verifică dacă $d_j = m_j$. În caz contrar, se opreşte algoritmul şi se afirmă că endomorfismul T nu este diagonalizabil.

5. În fiecare subspaţiu propriu V_{λ_j} se fixează câte o bază B_j şi se scrie baza
$$B' = \bigcup_{j=1}^{p} B_j$$
în care se obţine forma diagonală $D = M_{B'}(T)$.

6. Se scrie forma diagonală D, punându-se pe diagonală valorile proprii, fiecare valoare proprie fiind scrisă de atâtea ori cât arată multiplicitatea sa algebrică

7. Se verifică relaţia matriceală
$$D = C^{-1} \cdot A \cdot C,$$
unde matricea C este matricea de trecere de la baza B la baza B'.

Pentru un scalar $\lambda \in K$, matricile de forma

$$(\lambda),\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & ... & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & ... & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & ... & \lambda \end{pmatrix}$$

se numesc *celule Jordan* ataşate scalarului λ, de ordinul $1, 2, 3, ..., k$.

Definiţia 4.1.7 *Un endomorfism $T : V \to V$ se numeşte **jordanizabil** dacă există o bază a spaţiului vectorial V relativ la care matricea asociată este de forma*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_2 & ... & 0 \\ \cdot & \cdot & ... & \cdot \\ 0 & 0 & ... & J_p \end{pmatrix},$$

*unde J_i, $i = \overline{1,p}$, sunt celule Jordan de diferite ordine ataşate valorilor proprii λ_i. Matricea J se numeşte **formă canonică Jordan**.*

Teorema 4.1.14 (Forma canonică Jordan) *Pentru orice endomorfism $T \in End_K(V)$, $\dim_K V = n$, care are toate valorile proprii în corpul K, există o bază $B' \subset V$ astfel încât matricea $M_{B'}(T)$ să fie scrisă în forma canonică Jordan.*

Algoritm de reducere la forma canonică Jordan a unui endomorfism (a unei matrici)

1. Se fixează o bază B a spaţiului vectorial finit dimensional V şi se scrie matricea $A = M_B(T)$ a endomorfismului T în baza B.

2. Se determină valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, cu multiplicităţile lor algebrice $m_1, m_2, ..., m_p \in \mathbb{N}$, rezolvând ecuaţia caracteristică
$$\det[A - \lambda I_n] = 0.$$

3. Se verifică dacă toate valorile proprii λ_j, $\forall\ j = \overline{1,p}$, aparţin corpului K. În caz contrar, se opreşte algoritmul şi se afirmă că endomorfismul T nu este jordanizabil.

4. Pentru fiecare valoare proprie λ_j se calculează subspaţiul propriu asociat V_{λ_j} şi dimensiunea acestuia
$$d_j = \dim_K V_{\lambda_j} = n - rang(A - \lambda_j I_n) \leq m_j.$$

   Observaţie. Numărul $d_j \leq m_j$ ne dă numărul de celule Jordan corespunzătoare valorii proprii λ_j.

5. Pentru acele valori proprii pentru care $d_j < m_j$, se determină nişte *vectori principali* $X_2, ..., X_p$, asociaţi câte unui vector al unui sistem liniar independent de vectori proprii din V_{λ_j}, în felul următor: Se consideră $X_1 \in V_{\lambda_j}$ un vector propriu oarecare şi, impunându-se condiţiile de compatibilitate, se rezolvă sistemele recurente de ecuaţii liniare
$$(A - \lambda_j I_n)X_2 = X_1,\ (A - \lambda_j I_n)X_3 = X_2, ...,\ (A - \lambda_j I_n)X_p = X_{p-1}.$$

   Observaţie. Ţinând cont de condiţiile de compatibilitate şi de forma generală a vectorilor proprii sau principali, vom determina, dând valori particulare parametrilor, vectorii proprii liniar independenţi din V_{λ_j}, împreună cu vectorii principali asociaţi fiecăruia. În total, aceştia trebuie să fie în număr de m_j pentru fiecare valoare proprie λ_j.

   Observaţie. Celulele Jordan au ordinul egal cu numărul de vectori din sistemul format dintr-un vector propriu şi vectorii principali asociaţi.

6. Se scrie baza B' în care se obţine forma canonică Jordan $J = M_{B'}(T)$, reunind toţi vectorii proprii şi vectorii principali construiţi anterior.

7. Se scrie forma canonică Jordan
$$J = C^{-1} \cdot A \cdot C,$$
unde matricea C este matricea de trecere de la baza B la baza B'.

Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial euclidian cu produsul scalar $\langle , \rangle$ şi fie un endomorfism $T \in End_K(V)$.

Definiţia 4.1.8 *Endomorfismul $T^* \in End_K(V)$, definit prin egalitatea*
$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle\,,\ \forall\ v, w \in V,$$
*se numeşte **adjunctul** endomorfismului T.*

Definiţia 4.1.9 *Un endomorfism $T \in End_K(V)$ se numeşte **simetric** dacă*
$$T^* = T.$$

Propoziţia 4.1.15 *Un endomorfism $T \in End_K(V)$ este simetric dacă şi numai dacă matricea sa într-o bază ortonormată este simetrică, adică*
$$A = \ {}^{T}A.$$

Definiţia 4.1.10 *Un endomorfism $T \in End_K(V)$ se numeşte **antisimetric** dacă*
$$T^* = -T.$$

Propoziţia 4.1.16 *Un endomorfism $T \in End_K(V)$ este antisimetric dacă şi numai dacă matricea sa într-o bază ortonormată este antisimetrică, adică*
$$A = -\ {}^{T}A.$$

Definiţia 4.1.11 *Un endomorfism $T \in End_K(V)$ se numeşte **ortogonal** dacă*
$$\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle\,,\ \forall\ v, w \in V.$$

Propoziţia 4.1.17 *Un endomorfism $T \in End_K(V)$ este ortogonal dacă şi numai dacă matricea sa într-o bază ortonormată este ortogonală, adică*
$$A \cdot\ {}^{T}A = I_n.$$

4.2 Probleme rezolvate

Problema 4.2.1 *Să se studieze care dintre următoarele aplicaţii sunt transformări liniare:*

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2 + 3)$;

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_1, x_2)$;

c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $T(A) = {}^T A$;

d) $T : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $T(p) = q$, $q(X) = p(-X)$;

e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, 0)$;

f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3, 2x_3, x_1 + x_2)$;

g) $T : V_3 \to V_3$, $T(\overline{v}) = \overline{a} \times \overline{v}$, *unde* $\overline{a} \in V_3$ *este dat.*

Rezolvare. a) Aplicaţia nu este liniară deoarece

$$T(0, 0) = (0, 3) \neq (0, 0).$$

b) Deşi $T(0, 0) = (0, 0, 0)$, aplicaţia nu este liniară. Presupunem că T ar fi liniară şi deducem că

$$T(\lambda(x_1, x_2)) = \lambda T(x_1, x_2),\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Această egalitate implică o relaţie falsă:

$$\lambda^2 x_1 x_2 = \lambda x_1 x_2,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

c) Aplicaţia este liniară deoarece, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, avem

$$T(\alpha A + \beta B) = {}^T(\alpha A + \beta B) = \alpha\ {}^T A + \beta\ {}^T B = \alpha T(A) + \beta T(B).$$

d) Aplicaţia este liniară deoarece, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $p, q \in \mathbb{R}_n[X]$, avem

$$\begin{aligned} T(\alpha p + \beta q)(X) &= (\alpha p + \beta q)(-X) = \alpha p(-X) + \beta q(-X) = \\ &= \alpha T(p)(X) + \beta T(q)(X). \end{aligned}$$

e) Aplicaţia este liniară deoarece, oricare ar fi scalarul $\lambda \in \mathbb{R}$ şi vectorii (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, avem

$$\begin{aligned} T((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) &= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \\ &= (x_1 + y_1 - x_2 - y_2, x_1 + y_1 + x_2 + y_2, 0) = \\ &= (x_1 - x_2, x_1 + x_2, 0) + (y_1 - y_2, y_1 + y_2, 0) = \\ &= T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2) \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} T(\lambda(x_1, x_2)) &= T(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1 - \lambda x_2, \lambda x_1 + \lambda x_2, 0) = \\ &= \lambda(x_1 - x_2, x_1 + x_2, 0) = \lambda T(x_1, x_2). \end{aligned}$$

f) Aplicaţia este liniară. Se demonstrează ca la punctul e).

g) Aplicaţia este liniară deoarece, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $\overline{v}, \overline{w} \in V_3$, avem

$$\begin{aligned} T(\alpha\overline{v} + \beta\overline{w}) &= \overline{a} \times (\alpha\overline{v} + \beta\overline{w}) = \overline{a} \times (\alpha\overline{v}) + \overline{a} \times (\beta\overline{w}) = \\ &= \alpha\,(\overline{a} \times \overline{v}) + \beta\,(\overline{a} \times \overline{w}) = \alpha T(\overline{v}) + \beta T(\overline{w}). \end{aligned}$$

■

Problema 4.2.2 *Să se determine nucleul* $Ker\ T$ *şi imaginea* $\operatorname{Im} T$ *pentru transformarea liniară* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, *unde*

$$T(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, 2z, x - y).$$

Să se verifice relaţia

$$\dim_{\mathbb{R}} Ker\ T + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = 3.$$

Rezolvare. Nucleul transformării liniare este definit prin

$$Ker\ T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)\}.$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ x - y = 0, \end{cases}$$

găsim soluţiile

$$x = y = \alpha \in \mathbb{R},\ z = 0.$$

Prin urmare, nucleul transformării liniare este

$$Ker\ T = \{(\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Dimensiunea nucleului este evident $\dim_{\mathbb{R}} Ker\ T = 1$, o bază a acestuia fiind

$$B_1 = \{e_1 = (1, 1, 0)\}.$$

Imaginea transformării liniare este definită prin

$$\operatorname{Im} T = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid \exists\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ a. î. } T(x, y, z) = (a, b, c, d)\}.$$

Punând condiţia ca sistemul

$$\begin{cases} -x + y + z = a \\ x - y + z = b \\ 2z = c \\ x - y = d \end{cases}$$

să fie compatibil, găsim condiţiile de compatibilitate

$$\frac{c}{2} - a = b - \frac{c}{2} = d.$$

Prin urmare, imaginea transformării liniare este

$$\operatorname{Im} T = \left\{ \left(a, b, a + b, \frac{b - a}{2} \right) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dimensiunea imaginii este evident $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = 2$, o bază a acesteia fiind

$$B_2 = \{e_2 = (2, 0, 2, -1), e_3 = (0, 2, 2, 1)\}.$$

■

Problema 4.2.3 *Să se determine transformarea liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cu proprietatea $T(v_i) = w_i$, $\forall\ i = \overline{1, 3}$, unde*

$$v_1 = (1, 1, 0),\ v_2 = (1, 0, 1),\ v_3 = (0, 1, 1)$$

iar

$$w_1 = (2, 1, 0),\ w_2 = (-1, 0, 1),\ w_3 = (1, 1, 1).$$

Să se arate că avem $T^3 = T$.

Rezolvare. Fie un vector arbitrar $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Vectorul v se descompune în baza $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ ca

$$v = \frac{x+y-z}{2} \cdot v_1 + \frac{x-y+z}{2} \cdot v_2 + \frac{-x+y+z}{2} \cdot v_3.$$

Prin urmare, transformarea liniară are expresia

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= \frac{x+y-z}{2} \cdot T(v_1) + \frac{x-y+z}{2} \cdot T(v_2) + \frac{-x+y+z}{2} \cdot T(v_3) \\ &= \frac{x+y-z}{2} \cdot w_1 + \frac{x-y+z}{2} \cdot w_2 + \frac{-x+y+z}{2} \cdot w_3 \\ &= (2y-z, y, z). \end{aligned}$$

Evident, avem

$$\begin{aligned} T^3(x,y,z) &= T(T(T(x,y,z))) = T(T(2y-z,y,z)) = \\ &= T(2y-z,y,z) = (2y-z,y,z) = T(x,y,z). \end{aligned}$$

■

Problema 4.2.4 *Să se arate că transformarea liniară* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *definită prin*

$$T(x,y) = (x-y, x+y, 2x+3y),$$

este injectivă, dar nu este surjectivă.

Rezolvare. Nucleul transformării liniare este definit prin

$$Ker\ T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x,y) = (0,0,0)\}.$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x + 3y = 0, \end{cases}$$

găsim soluţiile $x = y = 0$. Prin urmare, nucleul transformării liniare este

$$KerT = \{(0,0)\},$$

adică aplicaţia este injectivă.

Imaginea transformării liniare este definită prin

$$\operatorname{Im} T = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ astfel încât } T(x,y) = (a,b,c)\}.$$

Punând condiţia ca sistemul

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + y = b \\ 2x + 3y = c \end{cases}$$

să fie compatibil, găsim condiţia de compatibilitate

$$a + b + \frac{3(b-a)}{2} = c \Leftrightarrow 5b - a = 2c.$$

Prin urmare, imaginea transformării liniare este

$$\mathrm{Im}T = \{ (5b - 2c, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R} \}.$$

Dimensiunea imaginii este evident

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\, T = 2 \neq 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3,$$

adică aplicaţia nu este surjectivă. ■

Problema 4.2.5 *a) Să se calculeze nucleul $Ker\ T$ şi imaginea $\mathrm{Im}\, T$ pentru transformarea liniară $T : V_3 \to V_3$, unde*

$$T(\overline{v}) = \overline{a} \times \overline{v},\ \overline{a} \in V_3 \backslash \{0\} \text{ dat},$$

b) Să se determine o bază în raport cu care matricea lui T are forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -||\overline{a}||^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. a) Nucleul transformării liniare este

$$\begin{aligned} Ker\ T &= \{\overline{v} \in V_3 \mid \overline{a} \times \overline{v} = \overline{0}\} = \\ &= \{\overline{v} \in V_3 \mid \overline{v} \text{ coliniar cu } \overline{a}\} = \\ &= \{\lambda \overline{a} \in V_3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

adică aplicaţia nu este injectivă.

Imaginea transformării liniare este definită prin

$$\mathrm{Im}\, T = \{\overline{w} \in V_3 \mid \exists\ \overline{v} \in V_3 \text{ astfel încât } \overline{a} \times \overline{v} = \overline{w}\}.$$

Condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţia $\overline{a} \times \overline{v} = \overline{w}$ să aibă soluţie este ca $\langle \overline{a}, \overline{w} \rangle = 0$, o soluţie a ecuaţiei fiind în acest caz

$$\overline{v} = -\frac{1}{||\overline{a}||^2} \cdot [\overline{a} \times \overline{w}] \,.$$

Prin urmare, imaginea transformării liniare este

$$\operatorname{Im} T = \{\overline{w} \in V_3 \mid \langle \overline{a}, \overline{w} \rangle = 0\} = \{\overline{w} \in V_3 \mid \overline{w} \perp \overline{a}\} \,,$$

adică aplicaţia nu este surjectivă.

b) Dacă $\overline{w} \in V_3$ este un vector arbitrar fixat astfel încât $\overline{w} \perp \overline{a}$, atunci o bază convenabilă este

$$B = \{\overline{e}_1 = \overline{a}, \overline{e}_2 = \overline{a} \times \overline{w}, \overline{e}_3 = \overline{w}\},$$

deoarece avem

$$T(\overline{e}_1) = \overline{0},\ T(\overline{e}_2) = -||\overline{a}||^2 \overline{e}_3,\ T(\overline{e}_3) = \overline{e}_2.$$

■

Problema 4.2.6 *Să se arate că endomorfismul $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dat în baza canonică de matricea*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

este nilpotent de grad doi (i. e. $T^2 = 0$). O transformare liniară cu această proprietate se numeşte ***structură tangentă****.*

Rezolvare. Se verifică uşor că avem $A^2 = 0$. ■

Problema 4.2.7 *Să se determine transformarea liniară care transformă un punct $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ în simetricul său faţă de planul $\pi : x + y + z = 0$ şi să se arate că transformarea astfel determinată este ortogonală.*

Rezolvare. Fie $P(\alpha, \beta, \gamma)$ un punct arbitrar din spaţiu. Coordonatele proiecţiei P' pe planul π a punctului P sunt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} x - \alpha = y - \beta = z - \gamma \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

adică avem

$$P'\left(\frac{2\alpha-\beta-\gamma}{3},\frac{-\alpha+2\beta-\gamma}{3},\frac{-\alpha-\beta+2\gamma}{3}\right).$$

Prin urmare, deoarece P' este mijlocul segmentului PP'', unde P'' este simetricul lui P faţă de planul π, rezultă că coordonatele simetricului P'' sunt

$$P''\left(\frac{\alpha-2\beta-2\gamma}{3},\frac{-2\alpha+\beta-2\gamma}{3},\frac{-2\alpha-2\beta+\gamma}{3}\right).$$

În concluzie, transformarea liniară căutată este $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, definită prin

$$T(x,y,z)=\left(\frac{x-2y-2z}{3},\frac{-2x+y-2z}{3},\frac{-2x-2y+z}{3}\right),$$

iar matricea sa în baza ortonormată canonică este

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}.$$

Se verifică uşor acum că avem $A\cdot{}^TA=I_3$. ■

Problema 4.2.8 *Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii pentru endomorfismele* $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, *ale căror matrici în baza canonică sunt*

$$a)\ A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\0&0&2\end{pmatrix},\quad b)\ A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Rezolvare. a) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{aligned}\det[A-\lambda I_3] &= 0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda&2&1\\0&-1-\lambda&-1\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow (1-\lambda)(1+\lambda)(2-\lambda)=0,\end{aligned}$$

adică avem valorile proprii $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ şi $\lambda_3=2$.

Vectorii proprii, cu excepţia vectorului nul, sunt elementele subspaţiilor proprii asociate.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(x,-2x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = -1$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(x,-x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_3 = 2$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_3} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(-y,y,-3y) \mid y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

b) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{aligned} \det[A - \lambda I_3] &= 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0, \end{aligned}$$

adică avem valorile proprii $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ şi $\lambda_3 = -1$.
Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 0$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(x,0,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = 2$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(x,2x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_3 = -1$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_3} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(x, -x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

■

Problema 4.2.9 *Folosind teorema Hamilton-Cayley, să se calculeze* A^{-1} *şi* $f(A)$, *unde* $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, *pentru matricile:*

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ c)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Polinomul caracteristic al matricii A este

$$P(\lambda) = \det[A - \lambda I_2] = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Conform teoremei Hamilton-Cayley, avem

$$A^2 - 2A + I_2 = 0 \Leftrightarrow A^2 = 2A - I_2.$$

Înmulţind această relaţie cu A^{-1}, găsim

$$A^{-1} = 2I_2 - A.$$

Înmulţind aceaşi relaţie cu A şi A^2, găsim, pe rând, egalităţile

$$\begin{aligned} A^3 &= 2A^2 - A = 3A - 2I_2, \\ A^4 &= 2A^3 - A^2 = 4A - 3I_2. \end{aligned}$$

Prin urmare, obţinem

$$f(A) = A^4 + A^3 + A^2 + A + I_2 = 10A - 5I_2.$$

b) Polinomul caracteristic al matricii A este

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det[A - \lambda I_3] = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)^2(2-\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2. \end{aligned}$$

Conform teoremei Hamilton-Cayley, avem

$$-A^3 + 4A^2 - 5A + 2I_3 = 0 \Leftrightarrow A^3 = 4A^2 - 5A + 2I_3.$$

Înmulţind această relaţie cu A^{-1}, găsim

$$-A^2 + 4A - 5I_3 + 2A^{-1} = 0 \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 - 4A + 5I_3\right).$$

Înmulţind aceaşi relaţie cu A, găsim egalitatea

$$\begin{aligned} A^4 &= 4A^3 - 5A^2 + 2A = \\ &= 11A^2 - 18A + 8I_3. \end{aligned}$$

Prin urmare, obţinem

$$\begin{aligned} f(A) &= A^4 + A^3 + A^2 + A + I_3 = \\ &= 16A^2 - 22A + 11I_3. \end{aligned}$$

c) Polinomul caracteristic al matricii A este

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det[A - \lambda I_4] = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1. \end{aligned}$$

Conform teoremei Hamilton-Cayley, avem

$$A^4 - 2A^2 + I_4 = 0 \Leftrightarrow A^4 = 2A^2 - I_4.$$

Înmulţind această relaţie cu A^{-1}, găsim

$$A^3 - 2A + A^{-1} = 0 \Leftrightarrow A^{-1} = 2A - A^3.$$

Evident, avem

$$\begin{aligned} f(A) &= A^4 + A^3 + A^2 + A + I_4 = \\ &= A^3 + 3A^2 + A. \end{aligned}$$

■

Problema 4.2.10 *Să se studieze dacă endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definit prin*

$$T(x, y, z) = (y, -4x + 4y, -2x + y + 2z),$$

este diagonalizabil şi, în caz afirmativ, să se diagonalizeze.

Rezolvare. Fie baza canonică

$$B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Deoarece avem descompunerile

$$\begin{cases} T(e_1) = (0, -4, -2) = 0 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2 - 2 \cdot e_3 \\ T(e_2) = (1, 4, 1) = 1 \cdot e_1 + 4 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ T(e_3) = (0, 0, 2) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3, \end{cases}$$

deducem că matricea endomorfismului T în baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\det[A - \lambda I_3] = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^3 = 0,$$

adică avem o singură rădăcină $\lambda_1 = 2$, de multiplicitate algebrică $m_1 = 3$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 2$ este

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Rezolvând sistemul matriceal, găsim

$$V_{\lambda_1} = \{(x, 2x, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Evident, dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_1} este

$$d_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_1} = 2 \neq 3 = m_1,$$

adică endomorfismul nu este diagonalizabil. ■

Problema 4.2.11 *Să se studieze dacă endomorfismele* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *definite în baza canonică de matricile*

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ e)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sunt diagonalizabile şi, în caz afirmativ, să se diagonalizeze.

Rezolvare. a) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 0,$$

adică avem o singură rădăcină $\lambda_1 = 0$, de multiplicitate algebrică $m_1 = 2$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 0$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Evident, dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_1} este

$$d_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_1} = 1 \neq 2 = m_1,$$

adică endomorfismul nu este diagonalizabil.

b) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 0,$$

adică avem rădăcinile $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, de multiplicitate algebrică $m_1 = 1$, $m_2 = 1$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 0$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Evident, dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_1} este

$$d_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_1} = 1 = m_1,$$

o bază în V_{λ_1} fiind $B_1 = \{e_1 = (1, -1)\}$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = 2$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_2} este

$$d_2 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_2} = 1 = m_2,$$

o bază în V_{λ_2} fiind $B_2 = \{e_2 = (1, 1)\}$.

Forma diagonală a endomorfismului este

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

şi avem relaţia $D = C^{-1}AC$, unde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0,$$

adică avem valorile proprii $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, de multiplicitate algebrică $m_1 = 2$, $m_2 = 1$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(x,y,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_1} este

$$d_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_1} = 2 = m_1,$$

o bază în V_{λ_1} fiind $B_1 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,1)\}$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = -1$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(0,y,-y) \mid y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_2} este

$$d_2 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_2} = 1 = m_2,$$

o bază în V_{λ_2} fiind $B_2 = \{e_3 = (0,1,-1)\}$.

Forma diagonală a endomorfismului este

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

şi avem relaţia $D = C^{-1}AC$, unde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

d) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = 0,$$

adică avem valorile proprii $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ şi $\lambda_3 = -2$, de multiplicitate algebrică $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ şi $m_3 = 1$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_1} este

$$d_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_1} = 1 = m_1,$$

o bază în V_{λ_1} fiind $B_1 = \{e_1 = (0, 1, 0)\}$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = 4$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \left(x, \frac{4x}{3}, x \right) \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_2} este

$$d_2 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_2} = 1 = m_2,$$

o bază în V_{λ_2} fiind $B_2 = \{e_2 = (3, 4, 3)\}$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_3 = -2$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_3} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_3} este

$$d_3 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_3} = 1 = m_3,$$

o bază în V_{λ_3} fiind $B_3 = \{e_3 = (1, 0, -1)\}$.

Forma diagonală a endomorfismului este

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

şi avem relaţia $D = C^{-1}AC$, unde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

e) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9 = 0,$$

adică avem valorile proprii $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 1$ şi $\lambda_4 = -1$, de multiplicitate algebrică $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$ şi $m_4 = 1$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 3$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(t, 3t, 3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_1} este

$$d_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_1} = 1 = m_1,$$

o bază în V_{λ_1} fiind $B_1 = \{e_1 = (1, 3, 3, 1)\}$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = -3$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(-t, 3t, -3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_2} este

$$d_2 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_2} = 1 = m_2,$$

o bază în V_{λ_2} fiind $B_2 = \{e_2 = (-1, 3, -3, 1)\}$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_3 = 1$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_3} &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(-t, -t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_3} este

$$d_3 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_3} = 1 = m_3,$$

o bază în V_{λ_3} fiind $B_3 = \{e_3 = (-1, -1, 1, 1)\}$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_4 = -1$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_4} &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(t, -t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_4} este

$$d_4 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_4} = 1 = m_4,$$

o bază în V_{λ_4} fiind $B_4 = \{e_4 = (1, -1, -1, 1)\}$.

Forma diagonală a endomorfismului este

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

şi avem relaţia $D = C^{-1}AC$, unde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Problema 4.2.12 *Să se aducă la forma canonică Jordan endomorfismele $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definite în baza canonică de matricile*

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix},\ b)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ d)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. a) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 5-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)^3 = 0,$$

adică avem o singură valoare proprie $\lambda_1 = 3$, de multiplicitate algebrică $m_1 = 3$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 3$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(-2y+5z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_1} este

$$d_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_1} = 2 < 3 = m_1,$$

adică avem două celule Jordan corespunzătoare valorii proprii $\lambda_1 = 3$. Considerăm vectorii proprii liniar independenţi $x_1 = (-2, 1, 0)$ şi $x_2 = (3, 1, 1)$, cel de-al doilea vector propriu fiind ales astfel încât sistemul matriceal $Bx_3 = x_2$, unde

$$B = A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ şi } x_3 = (\alpha, \beta, \gamma),$$

să aibă soluţie. Rezolvând sistemul de mai sus, găsim o soluţie ca fiind $x_3 = (1, 0, 0)$. Prin urmare, obţinem baza Jordan $B^J = \{x_1, x_2, x_3\}$ în care matricea canonică Jordan este

$$J = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

unde

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0,$$

adică avem valorile proprii $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_2 = 2$, de multiplicitate algebrică $m_1 = 2$ şi $m_2 = 1$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_1} este

$$d_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_1} = 1 < 2 = m_1,$$

adică avem o singură celulă Jordan corespunzătoare valorii proprii $\lambda_1 = 1$. Fie matricea

$$B = A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

şi vectorul propriu $x_1 = (1,1,1)$. Rezolvând sistemul $Bx_2 = x_1$, găsim o soluţie ca fiind, spre exemplu, $x_2 = (1,2,3)$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = 2$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, 2x, 4x) \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_2} este

$$d_2 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_2} = 1 = m_2.$$

Fie vectorul propriu $x_3 = (1,2,4) \in V_{\lambda_2}$. Prin urmare, obţinem baza Jordan $B^J = \{x_1, x_2, x_3\}$ în care matricea canonică Jordan este

$$J = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

unde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^4 = 0,$$

adică avem o singură valoare proprie $\lambda_1 = 1$, de multiplicitate algebrică $m_1 = 4$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(x,0,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_1} este

$$d_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_1} = 1 < 4 = m_1,$$

adică avem o singură celulă Jordan corespunzătoare valorii proprii $\lambda_1 = 1$. Fie matricea

$$B = A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şi vectorul propriu $x_1 = (16,0,0,0)$. Rezolvând sistemul $Bx_2 = x_1$, găsim o soluţie ca fiind, spre exemplu, $x_2 = (0,8,0,0)$. Mai departe, rezolvând şi sistemul $Bx_3 = x_2$, găsim o soluţie $x_3 = (0,-6,4,0)$. În final, sistemul $Bx_4 = x_3$ are ca soluţie pe $x_4 = (0,5,-6,2)$.

În concluzie, obţinem baza Jordan $B^J = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ în care matricea canonică Jordan este

$$J = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

unde

$$C = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 = 0,$$

adică avem valorile proprii $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_2 = -1$, de multiplicitate algebrică $m_1 = 2$ şi $m_2 = 2$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(x,x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_1} este

$$d_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_1} = 1 < 2 = m_1,$$

adică avem o singură celulă Jordan corespunzătoare valorii proprii $\lambda_1 = 1$. Fie matricea

$$B_1 = A - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

şi vectorul propriu $x_1 = (1,1,1,1)$. Rezolvând sistemul $B_1 x_2 = x_1$, găsim o soluţie ca fiind, spre exemplu, $x_2 = (3,2,1,0)$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = -1$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(x,-x,x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_2} este

$$d_2 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_2} = 1 < 2 = m_2,$$

adică avem o singură celulă Jordan corespunzătoare valorii proprii $\lambda_2 = -1$. Fie matricea

$$B_2 = A + I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şi vectorul propriu $x_3 = (1, -1, 1, -1)$. Rezolvând sistemul $B_2 x_4 = x_3$, găsim o soluţie ca fiind, spre exemplu, $x_4 = (0, -1, 2, -3)$.

În concluzie, obţinem baza Jordan $B^J = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ în care matricea canonică Jordan este

$$J = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

unde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

■

Problema 4.2.13 *Relativ la produsul scalar canonic, să se determine adjunctul endomorfismului $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definit prin*

$$T(x, y) = (x + 2y, 8x).$$

Rezolvare. Fixăm baza ortonormată canonică

$$B = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Matricea lui T în această bază este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix},$$

ceea ce implică faptul că matricea adjunctei este

$${}^T A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

În concluzie, endomorfismul adjunct este

$$T^*(x, y) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} x + 8y \\ 2x \end{pmatrix}^T = (x + 8y, 2x).$$

■

4.3 Probleme propuse

Problema 4.3.1 *Să se studieze care dintre următoarele aplicaţii sunt transformări liniare:*

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1, -x_1)$;

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$;

c) $T : V_3 \to \mathbb{R}$, $T(\overline{v}) = \overline{a} \cdot \overline{v}$, *unde* $\overline{a} \in V_3$ *este dat*;

d) $T : V_3 \to V_3$, $T(\overline{v}) = 2 \langle \overline{v}, \overline{a} \rangle \dfrac{\overline{a}}{||\overline{a}||^2} - \overline{v}$, *unde* $\overline{a} \in V_3 \backslash \{\overline{0}\}$ *este dat*;

e) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $T(A) = Trace(A)$, unde $Trace(A) = a_{11} + a_{22}$;

f) $T : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $T(p) = q$, $q(X) = p(X + 1) - p(X)$;

g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (\sin x_1, \cos x_2, x_1 - x_2)$;

h) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$;

i) $T : \mathcal{C}^n[0, 1] \to \mathcal{C}^0[0, 1]$, $T(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f^{(i)}$, *unde* $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

j) $T : \mathcal{C}^0[0, 1] \to \mathcal{F}[0, 1]$, $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$, $\forall\ x \in [0, 1]$.

R. a) Da. b) Da. c) Da. d) Da. e) Da. f) Da. g) Nu. h) Da. i) Da. j) Da.

Problema 4.3.2 *Să se arate că aplicaţiile de mai jos sunt transformări liniare şi să se determine nucleul* $Ker\ T$ *şi imaginea* $\operatorname{Im} T$ *a acestora:*

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y - z, 2x - y + z)$;

b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z, t) = (x + y + z, y - t, z - t)$;

c) $T : V_3 \to V_3$, $T(\overline{v}) = \langle \overline{v}, \overline{a} \rangle \dfrac{\overline{a}}{||\overline{a}||^2}$, *unde* $\overline{a} \in V_3 \backslash \{\overline{0}\}$ *este dat*;

d) $T : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $T(p) = \int_{-1}^{1} p(x)dx$.

R. a) $Ker\ T = \{(0, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$.
b) $Ker\ T = \{(-2t, t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3$.
c) $Ker\ T = \{\overline{v} \in V_3 \mid \overline{v} \perp \overline{a}\}$, $\operatorname{Im} T = \{\lambda\overline{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
d) $Ker\ T = \{-3aX^2 + bX + a \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}$.

Problema 4.3.3 *Să se scrie matricea în baza canonică a endomorfismului* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *unde*

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, x - z).$$

R. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Problema 4.3.4 *Fie* $\overline{a}, \overline{b} \in V_3 \backslash \{\overline{0}\}$ *doi vectori necoliniari. Să se arate că aplicaţia* $T : V_3 \to V_3$, *definită prin*

$$T(\overline{x}) = \langle \overline{a}, \overline{x} \rangle \cdot \overline{b} + \langle \overline{b}, \overline{x} \rangle \cdot \overline{a},$$

este liniară şi apoi să se determine matricea lui T *în baza* $B = \{\overline{a}, \overline{b}, \overline{a} \times \overline{b}\}$.

R. $M_B(T) = \begin{pmatrix} \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle & ||\overline{b}||^2 & 0 \\ ||\overline{a}||^2 & \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 4.3.5 *Fie* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \xrightarrow{T}$ *proiecţia punctului* $P(x, y, 0)$ *pe planul* $\pi : 3x - y - 2z = 0$. *Să se arate că* T *este transformare liniară şi să se calculeze* $Ker\ T$ *şi* $\operatorname{Im} T$, *precum şi defectul şi rangul lui* T.

R. $T(x, y) = \left(\dfrac{5x + 3y}{14}, \dfrac{3x + 13y}{14}, \dfrac{3x - y}{7} \right)$; $Ker\ T = \{(0, 0)\}$, $\dim_{\mathbb{R}} Ker\ T = 0$; $\operatorname{Im} T = \{(a, 3a - 2c, c) \mid a, c \in \mathbb{R}\}$, $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = 2$.

Problema 4.3.6 *Să se determine endomorfismul* $T \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ *astfel încât*

$$T(1, 1, 1) = (0, 0, 0),\ T(1, 0, 0) = (3, 1, 0),\ T(0, 0, 1) = (1, 2, 0).$$

R. $T(x, y, z) = (3x - 4y + z, x - 3y + 2z, 0)$.

Problema 4.3.7 *Fie endomorfismul* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *definit prin*

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y, y).$$

Să se arate că $T^2 = T$ *(i. e.* T *este* ***proiecţie****) şi că*

$$\mathbb{R}^3 = Ker\ T \oplus \operatorname{Im} T.$$

Ind. Avem $Ker\ T = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ şi $\operatorname{Im} T = \{(a, b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Problema 4.3.8 *Să se arate că transformarea liniară* $T : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, *definită prin relaţia*

$$T(x) = (x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{2n}, -x_1, -x_2, ..., -x_n),$$

are proprietatea $T^2 = -1_{\mathbb{R}^{2n}}$. *O transformare liniară cu această proprietate se numeşte* ***structură aproape complexă***.

Problema 4.3.9 *Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii pentru endomorfismele* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *ale căror matrici în baza canonică sunt*

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ b)\ A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$c)\ A = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

R. a) $\lambda_1 = 4$, $V_{\lambda_1} = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$; $\lambda_2 = 1$, $V_{\lambda_2} = \{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
b) $\lambda_1 = 4$, $V_{\lambda_1} = \{(x, -x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$; $\lambda_2 = 3$, $V_{\lambda_2} = \{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$; $\lambda_3 = 11, V_{\lambda_3} = \left\{ \left(-\frac{3z}{4}, -z, z\right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\}$.
c) $\lambda_1 = 1$, $V_{\lambda_1} = \{(-3y, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Problema 4.3.10 *Folosind teorema Hamilton-Cayley, să se calculeze* A^{-1} *şi* $f(A)$, *unde* $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$, *pentru matricile:*

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$c)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

R. a) $A^{-1} = 2I_2 - A$, $f(A) = 0_2$. b) $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 + 2A - I_3\right)$, $f(A) = 19A^2 - 8A - 11I_3$. c) $A^{-1} = \frac{1}{16}\left(-A^3 + 8A^2 - 24A + 32I_4\right)$, $f(A) = 4A^3 - 18A^2 + 28A - 15I_4$.

Problema 4.3.11 *Să se arate că endomorfismul* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, *definit prin*

$$T(x, y, z, t) = (-x + t, -y, -z - 2t, x - 2z + 3t),$$

este diagonalizabil şi să se precizeze baza în care se obţine forma diagonală.

R. $B' = \{e_1' = (2, 0, 1, 0),\ e_2' = (0, 1, 0, 0),\ e_3' = (1, 0, -2, 5),\ e_4' = (-1, 0, 2, 1)\}$, $D = M_{B'}(T) = Diag(-1, -1, 4, -2)$.

Problema 4.3.12 *Să se studieze dacă endomorfismele* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *definite în baza canonică de matricile*

$$a)\ A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$c)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix},\ d)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

sunt diagonalizabile şi, în caz afirmativ, să se diagonalizeze.

R. a) $B' = \{e_1' = (1, 0),\ e_2' = (-8, 1)\}$, $D = M_{B'}(T) = Diag(4, -4)$.

b) $B' = \{e_1' = (0, 1, 1),\ e_2' = (1, 1, 1),\ e_3' = (1, 0, 1)\}$, $D = M_{B'}(T) = Diag(1, 2, 3)$.

c) Nu este diagonalizabilă.

d) $B' = \{e_1' = (1, 1, 0, 0),\ e_2' = (1, 0, 1, 0),\ e_3' = (1, 0, 0, 1),\ e_4' = (1, -1, -1, -1)\}$, $D = M_{B'}(T) = Diag(2, 2, 2, -2)$.

Problema 4.3.13 *Să se aducă la forma canonică Jordan endomorfismele* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *definite în baza canonică de matricile*

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix},\ b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix},$$

$$c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ d)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

R. a) $J = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, unde $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $J = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $J = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, unde $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $J = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -1 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 4.3.14 *Relativ la produsul scalar canonic, să se determine adjunctul endomorfismului:*

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x - y, 7x + 5y)$;

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x, y, -z)$;

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (3x - y, 2y + z, x + y - z)$.

R. a) $T^*(x, y) = (x + 7y, -x + 5y)$. b) $T^* = T$. c) $T^*(x, y, z) = (3x + z, -x + 2y + z, y - z)$.

Capitolul 5

Forme biliniare. Forme pătratice

5.1 Elemente teoretice fundamentale

Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune $\dim_K V = n$.

Definiţia 5.1.1 *O aplicaţie $\mathcal{A} : V \times V \to K$, care verifică proprietăţile*

1. $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x)$, $\forall\ x, y \in V$,
2. $\mathcal{A}(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\mathcal{A}(x, z) + \beta\mathcal{A}(y, z)$, $\forall\ \alpha, \beta \in K$, $\forall\ x, y, z \in V$,

se numeşte ***formă biliniară şi simetrică*** *pe V.*

Dacă $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este o bază în V şi avem descompunerile

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j,$$

atunci expresia analitică a formei biliniare şi simetrice $\mathcal{A}$ este

$$\mathcal{A}(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

unde $a_{ij} = \mathcal{A}(e_i, e_j) = \mathcal{A}(e_j, e_i) = a_{ji}$, $\forall\ i, j = \overline{1, n}$.

Definiţia 5.1.2 *Matricea simetrică $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ (i. e., $A = {}^T A$) se numeşte* ***matricea în baza*** *B* ***a formei biliniare şi simetrice*** *$\mathcal{A}$.*

Observaţia 5.1.1 *Dacă notăm $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, atunci*

$$\mathcal{A}(x, y) = x \cdot A \cdot {}^T y$$

este forma matriceală a expresiei analitice.

Fie $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ o altă bază în V şi fie A' matricea în baza B' a formei biliniare şi simetrice $\mathcal{A}$.

Teorema 5.1.2 *Legătura între matricile A şi A' este dată de relaţia*

$$A' = {}^T C \cdot A \cdot C,$$

unde C este matricea de trecere de la baza B la baza B'.

Definiţia 5.1.3 *O aplicaţie $Q : V \to K$ se numeşte **formă pătratică** pe V dacă există o formă biliniară şi simetrică $\mathcal{A} : V \times V \to K$ astfel încât $Q(x) = \mathcal{A}(x, x)$. Forma biliniară şi simetrică $\mathcal{A}$ se numeşte **polara** sau **forma dedublată** a formei pătratice Q.*

Observaţia 5.1.3 *i) Expresia analitică a unei forme pătratice Q, în raport cu baza $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, este*

$$Q(x) = \mathcal{A}(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x \cdot A \cdot {}^T x,$$

unde $a_{ij} = \mathcal{A}(e_i, e_j)$, $\forall\ i, j = \overline{1, n}$.

*ii) Matricea simetrică $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, care este matricea polarei $\mathcal{A}$, se numeşte **matricea în baza** B **a formei pătratice** Q.*

iii) Dacă se cunoaşte forma pătratică Q, atunci forma polară $\mathcal{A}$ din care provine este dată de formula

$$\mathcal{A}(x, y) = \frac{1}{2} \left[Q(x + y) - Q(x) - Q(y) \right].$$

Definiţia 5.1.4 *i) Spunem că o formă pătratică $Q : V \to K$ s-a redus la **forma canonică** într-o bază $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ dacă expresia analitică formei pătratice Q, în raport cu baza B, este*

$$Q(x) = \mathcal{A}(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + ... + \lambda_n x_n^2,$$

unde $\lambda_i = \mathcal{A}(e_i, e_i)$, $\forall\ i = \overline{1, n}$.

ii) Tripletul de numere naturale $\sigma(Q) = (p, q, d) \in \mathbb{N}^3$, asociat unei forme canonice

$$Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + ... + \lambda_n x_n^2,$$

unde $p =$ numărul de coeficienţi λ_i strict pozitivi, $q =$ numărul de coeficienţi λ_i strict negativi şi $d =$ numărul de coeficienţi λ_i egali cu zero, se numeşte ***signatura*** *formei pătratice Q.*

Teorema 5.1.4 (Legea de inerţie) *Signatura unei forme pătratice Q este aceeaşi pentru orice formă canonică a lui Q.*

Definiţia 5.1.5 *O formă pătratică Q este* ***pozitiv definită*** *(respectiv,* ***negativ definită****) dacă are signatura $\sigma(Q) = (n, 0, 0)$ (respectiv, $\sigma(Q) = (0, n, 0)$), unde $n = \dim_K V$.*

Metode de reducere la forma canonică a unei forme pătratice reale ($K = \mathbb{R}$)

(1) Metoda lui Gauss (sau a formării de pătrate).

Fie $Q : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică, exprimată prin

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

unde cel puţin un coeficient $a_{ij} \neq 0$.

1. Dacă $Q(x)$ posedă un termen x_i^2 (putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a_{11} \neq 0$), atunci scriind

$$Q(x) = a_{11} x_1^2 + 2 \sum_{i=2}^{n} a_{1i} x_1 x_i + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

putem forma un pătrat perfect şi obţinem

$$Q(x) = a_{11} \left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_i \right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij} x_i x_j,$$

unde, în coeficienţii a'_{ij}, $i, j = \overline{2, n}$, s-au introdus şi termenii, cu semn schimbat, necesari obţinerii pătratului expresiei

$$x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_i.$$

În forma pătratică rămasă $\sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij} x_i x_j$ nu mai apar decât coordonatele $x_2, x_3, ..., x_n$, adică ea poate fi privită ca o nouă formă pătratică pe un spaţiu vectorial real de dimensiune $n-1$, şi deci i se poate aplica algoritmul descris mai sus.

2. Dacă $Q(x)$ nu conţine pătrate, atunci, în mod necesar, trebuie să conţină cel puţin un termen nenul $a_{ij}x_ix_j$, unde $i \neq j$. Atunci, prin schimbarea de coordonate

$$x_i = x'_i + x'_j,\ x_j = x'_i - x'_j,\ x_k = x'_k,\ k \neq i, j,$$

se obţine un nou sistem de coordonate (o nouă bază), în raport cu care expresia analitică a lui Q conţine termenii $a_{ij}x'^2_i - a_{ij}x'^2_j$, şi deci, în continuare, putem aplica Pasul 1.

(2) Metoda lui Jacobi

Fie $Q : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică şi $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ matricea lui Q într-o bază $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ a spaţiului vectorial V. Fie determinanţii

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},\ ...,\ \Delta_n = \det A.$$

Dacă $\Delta_i \neq 0$, $\forall\ i = \overline{1,n}$, atunci în baza

$$B' = \{e'_1 = c_{11}e_1, e'_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2, ..., e'_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + .. + c_{nn}e_n\}$$

forma pătratică Q are forma canonică

$$Q(x') = \frac{1}{\Delta_1}x'^2_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}x'^2_2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}x'^2_3 + ... + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}x'^2_n,$$

unde x'_i, $i = \overline{1,n}$, sunt coordonatele vectorului x în baza B', iar scalarii c_{ij}, $i \geq j$, se determină din condiţiile

$$\mathcal{A}(e'_i, e_j) = 0,\ \forall\ j < i \leq n,\ \text{şi } \mathcal{A}(e'_i, e_i) = 1,\ \forall\ i = \overline{1,n},$$

forma biliniară şi simetrică $\mathcal{A}$ fiind polara formei pătratice Q.

Corolarul 5.1.5 (Criteriul lui Sylvester) *Fie $Q : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Dacă condiţiile din metoda lui Jacobi sunt îndeplinite, atunci:*

(1) *forma pătratică Q este pozitiv definită* $\Leftrightarrow \Delta_i > 0$, $\forall\ i = \overline{1,n}$;

(2) *forma pătratică Q este negativ definită* $\Leftrightarrow (-1)^i\Delta_i > 0, \forall\ i = \overline{1,n}$.

(3) Metoda valorilor proprii (sau a transformărilor ortogonale)

Fie $Q : (V, \langle , \rangle) \to \mathbb{R}$ o formă pătratică pe un spaţiu vectorial euclidian $(V, \langle , \rangle)$ şi fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ matricea lui Q într-o bază ortonormată $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ a spaţiului euclidian $(V, \langle , \rangle)$. Deoarece matricea A este simetrică, ea este diagonalizabilă. Dacă $C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ este matricea *vectorilor proprii ortonormaţi* ai matricii A, aşezaţi pe coloane, atunci transformarea de coordonate

$$^Tx = C \cdot\ ^Tx',$$

care este o transformare ortogonală (i. e., $C\cdot\ ^TC = I_n$), conduce la forma canonică

$$Q(x') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + ... + \lambda_n x_n'^2,$$

unde λ_i, $i \in \{1, ..., n\}$, sunt valorile proprii ale matricii A, luate cu multiplicităţile lor algebrice (fiecare valoare proprie λ_i apare de atâtea ori cât este multiplicitatea ei).

Corolarul 5.1.6 *Fie $Q : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică pe un spaţiu vectorial euclidian $(V, \langle , \rangle)$ şi fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea lui Q într-o bază ortonormată a spaţiului euclidian V. Atunci, forma pătratică Q este pozitiv definită (respectiv, negativ definită) dacă şi numai dacă toate valorile proprii ale matricii A sunt strict pozitive (respectiv, strict negative).*

5.2 Probleme rezolvate

Problema 5.2.1 *Fie $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o formă biliniară şi simetrică, a cărei expresie analitică în baza canonică este*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x, y) &= 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_2 - \\ &\quad -x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3.\end{aligned}$$

a) *Să se scrie matricea lui $\mathcal{A}$ în baza canonică şi în baza*

$$B' = \{e_1' = (1, 1, 1), e_2' = (1, 1, 0), e_3' = (1, 0, 0)\}.$$

b) *Să se determine forma pătratică asociată lui $\mathcal{A}$.*

Rezolvare. a) Fie $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ baza canonică în $\mathbb{R}^3$. Atunci, matricea lui $\mathcal{A}$ în baza canonică B este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deoarece matricea de trecere de la baza B la baza B' este

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

rezultă că matricea lui $\mathcal{A}$ în baza B' este

$$A' = {}^T C \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Forma pătratică asociată lui $\mathcal{A}$ este

$$Q(x) = \mathcal{A}(x,x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

■

Problema 5.2.2 *Pentru formele pătratice $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de mai jos, să se determine formele biliniare şi simetrice din care provin, precum şi matricea lor în baza canonică:*

a) $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = -18x_1x_2 + 9x_2^2$.

b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_3^2$.

c) $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$.

Rezolvare. a) Forma biliniară şi simetrică din care provine forma pătratică Q este dată de formula

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x,y) &= \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\big[-18(x_1+y_1)(x_2+y_2) + 9(x_2+y_2)^2 + \\ &\quad +18x_1x_2 - 9x_2^2 + 18y_1y_2 - 9y_2^2\big] \\ &= -9x_1y_2 - 9x_2y_1 + 9x_2y_2. \end{aligned}$$

Prin urmare, matricea în baza canonică a lui Q este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}.$$

b) Folosind formula anterioară, găsim

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x,y) &= \frac{1}{2}\left[2(x_1+y_1)^2 - 6(x_1+y_1)(x_2+y_2) + 3(x_3+y_3)^2 - \right. \\ &\quad \left. -2x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_3^2 - 2y_1^2 + 6y_1y_2 - 3y_3^2\right] \\ &= 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 3x_3y_3. \end{aligned}$$

Matricea în baza canonică a lui Q este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Utilizând din nou formula de mai sus, obţinem forma biliniară şi simetrică

$$\mathcal{A}(x,y) = \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}x_2y_3 + \frac{1}{2}x_3y_2 + \frac{1}{2}x_3y_4 + \frac{1}{2}x_4y_3,$$

a cărei matrice este (matricea lui Q)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Problema 5.2.3 *Formele pătratice $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de mai jos sunt date în baza canonică B a lui $\mathbb{R}^n$. Să se scrie aceste forme în baza*

$$B' = \{e_1', e_2', ..., e_n'\} \subset \mathbb{R}^n,$$

în cazurile:

a) $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 9x_2^2$, $e_1' = 2e_1 - e_2$, $e_2' = e_1 - e_2$.

b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2$, $e_1' = e_1 + e_2 + e_3$, $e_2' = 2e_1 - e_2 + e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 - 3e_3$.

Rezolvare. a) Matricea de trecere de la baza B la baza B' este

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

iar matricea lui Q în baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, matricea lui Q în baza B' este

$$A' = {}^TC \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

În concluzie, expresia analitică a lui Q în baza B' este

$$Q(x') = x' \cdot A' \cdot {}^Tx' = x_1'^2 + 2x_2'^2.$$

b) Matricea de trecere de la baza B la baza B' este

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

iar matricea lui Q în baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, matricea lui Q în baza B' este

$$A' = {}^TC \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -4 \\ 9 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

În concluzie, expresia analitică a lui Q în baza B' este

$$\begin{aligned} Q(x') &= x' \cdot A' \cdot {}^Tx' = \\ &= 8x_1'^2 + 3x_2'^2 - 4x_3'^2 + 18x_1'x_2' - 8x_1'x_3' - 6x_2'x_3'. \end{aligned}$$

■

Problema 5.2.4 *Utilizând metoda lui Gauss, să se găsească forma canonică şi signatura formelor pătratice de mai jos. Care dintre aceste forme pătratice sunt pozitiv definite şi care sunt negativ definite?*

a) $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$.

b) $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = -x_1x_2$.

c) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

d) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

e) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 19x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3$.

f) $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$.

Rezolvare. a) Deoarece în expresia lui Q avem pătrate, formăm pătrate perfecte şi obţinem

$$\begin{aligned} Q(x) &= 4(x_1^2 + x_1x_2) + 5x_2^2 = \\ &= 4\left[\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 - \frac{x_2^2}{4}\right] + 5x_2^2 = \\ &= 4\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + 4x_2^2. \end{aligned}$$

Efectuând schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \dfrac{x_2}{2} \\ x_2' = x_2, \end{cases}$$

găsim forma canonică

$$Q(x') = 4x_1'^2 + 4x_2'^2.$$

Signatura formei pătratice Q este $\sigma(Q) = (2, 0, 0)$, adică forma pătratică este pozitiv definită.

b) Deoarece în expresia lui Q nu avem pătrate, efectuăm schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' \\ x_2 = x_1' - x_2' \end{cases}$$

şi găsim forma canonică

$$Q(x') = -x_1'^2 + x_2'^2.$$

Signatura formei pătratice Q este $\sigma(Q) = (1, 1, 0)$, adică forma pătratică nu este nici pozitiv definită, nici negativ definită.

c) Deoarece în expresia lui Q avem pătrate, formăm pătrate perfecte şi obţinem

$$\begin{aligned} Q(x) &= \left(x_1^2 + 4x_1x_3\right) + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_2x_3 = \\ &= (x_1 + 2x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 = \\ &= (x_1 + 2x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2. \end{aligned}$$

Efectuând schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_3 \\ x_2' = x_2 + x_3 \\ x_3' = x_3, \end{cases}$$

găsim forma canonică

$$Q(x') = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2.$$

Signatura formei pătratice Q este $\sigma(Q) = (2, 1, 0)$, adică forma pătratică nu este nici pozitiv definită, nici negativ definită.

d) Deoarece în expresia lui Q nu avem pătrate, efectuăm schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' \\ x_2 = x_1' - x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$$

şi găsim

$$Q(x') = x_1'^2 - x_2'^2 + 2x_1'x_3'.$$

Restrângem pătratele şi obţinem

$$\begin{aligned} Q(x') &= \left(x_1'^2 + 2x_1'x_3'\right) - x_2'^2 = \\ &= \left(x_1' + x_3'\right)^2 - x_3'^2 - x_2'^2. \end{aligned}$$

Efectuând schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1'' = x_1' + x_3' \\ x_2'' = x_3' \\ x_3'' = x_2', \end{cases}$$

găsim forma canonică

$$Q(x'') = x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2.$$

Signatura formei pătratice Q este $\sigma(Q) = (1, 2, 0)$, adică forma pătratică nu este nici pozitiv definită, nici negativ definită.

e) Deoarece în expresia lui Q avem pătrate, formăm pătrate perfecte şi obţinem

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x_1^2 + 9x_2^2 + 19x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 = \\ &= 2\left(x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3\right) + 9x_2^2 + 19x_3^2 = \\ &= 2\left[(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3\right] + 9x_2^2 + 19x_3^2 = \\ &= 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 17x_3^2 - 8x_2x_3 = \\ &= 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 4x_3)^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Efectuând schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2' = x_2 - 4x_3 \\ x_3' = x_3, \end{cases}$$

găsim forma canonică

$$Q(x') = 2x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2.$$

Signatura formei pătratice Q este $\sigma(Q) = (3, 0, 0)$, adică forma pătratică este pozitiv definită.

f) Deoarece în expresia lui Q avem pătrate, formăm pătrate perfecte şi obţinem

$$\begin{aligned} Q(x) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 = \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 = \\ &= (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_3x_4 = \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 + 2x_3x_4 + 3x_4^2 = \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + 2x_4^2. \end{aligned}$$

Efectuând schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_2 + x_3 \\ x_3' = x_3 + x_4 \\ x_4' = x_4, \end{cases}$$

găsim forma canonică

$$Q(x') = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + 2x_4'^2.$$

Signatura formei pătratice Q este $\sigma(Q) = (4, 0, 0)$, adică forma pătratică este pozitiv definită. ■

Problema 5.2.5 *Utilizând metoda lui Jacobi, să se găsească forma canonică şi signatura formelor pătratice de mai jos. Care dintre aceste forme pătratice sunt pozitiv definite şi care sunt negativ definite? Să se precizeze baza spaţiului în care se obţine forma canonică respectivă.*

a) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 - 8x_2x_3$.

Rezolvare. a) Matricea în baza canonică a formei pătratice Q este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

iar determinanţii corespunzători sunt

$$\Delta_1 = 1 \neq 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = -56 \neq 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -28 \neq 0.$$

Prin urmare, forma canonică este

$$Q(x') = x_1'^2 - \frac{1}{56}x_2'^2 + 2x_3'^2.$$

Signatura formei pătratice Q este $\sigma(Q) = (2, 1, 0)$, adică forma pătratică nu este nici pozitiv definită, nici negativ definită.

Pentru a găsi baza în care se obţine această formă canonică, luăm vectorul $e_1' = c_{11}e_1$ şi determinăm scalarul $c_{11} \in \mathbb{R}$ din condiţia

$$\mathcal{A}(e_1', e_1) = 1 \Rightarrow c_{11} = 1,$$

adică avem

$$e_1' = e_1 = (1, 0, 0).$$

Considerăm apoi $e_2' = c_{21}e_1 + c_{22}e_2$ şi determinăm scalarii $c_{21}, c_{22} \in \mathbb{R}$ din sistemul

$$\begin{cases} \mathcal{A}(e_2', e_1) = 0 \\ \mathcal{A}(e_2', e_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{21} + 8c_{22} = 0 \\ 8c_{21} + 8c_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow c_{21} = \frac{1}{7},\ c_{22} = -\frac{1}{56},$$

adică avem

$$e_2' = \frac{1}{7}e_1 - \frac{1}{56}e_2 = \left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{56}, 0\right).$$

În final, considerăm $e_3' = c_{31}e_1 + c_{32}e_2 + c_{33}e_3$ şi determinăm scalarii $c_{31}, c_{32}, c_{33} \in \mathbb{R}$ din sistemul

$$\begin{cases} \mathcal{A}(e_3', e_1) = 0 \\ \mathcal{A}(e_3', e_2) = 0 \\ \mathcal{A}(e_3', e_3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{31} + 8c_{32} + 2c_{33} = 0 \\ 8c_{31} + 8c_{32} + 2c_{33} = 0 \\ 2c_{31} + 2c_{32} + c_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c_{31} = 0,\ c_{32} = -\frac{1}{2},\ c_{33} = 2,$$

adică avem

$$e_3' = -\frac{1}{2}e_2 + 2e_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, 2\right).$$

b) Matricea în baza canonică a formei pătratice Q este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

iar determinanţii corespunzători sunt

$$\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -9,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -729.$$

Prin urmare, forma canonică este

$$Q(x') = x_1'^2 - \frac{1}{9}x_2'^2 + \frac{1}{81}x_3'^2.$$

Signatura formei pătratice Q este $\sigma(Q) = (2, 1, 0)$, adică forma pătratică nu este nici pozitiv definită, nici negativ definită.

Luăm vectorul $e_1' = c_{11}e_1$ şi determinăm scalarul $c_{11} \in \mathbb{R}$ din condiţia

$$\mathcal{A}(e_1', e_1) = 1 \Rightarrow c_{11} = 1,$$

adică avem

$$e_1' = e_1 = (1, 0, 0).$$

Considerăm acum $e_2' = c_{21}e_1 + c_{22}e_2$ şi determinăm scalarii $c_{21}, c_{22} \in \mathbb{R}$ din sistemul

$$\begin{cases} \mathcal{A}(e_2', e_1) = 0 \\ \mathcal{A}(e_2', e_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{21} - 4c_{22} = 0 \\ -4c_{21} + 7c_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow c_{21} = -\frac{4}{9},\ c_{22} = -\frac{1}{9},$$

adică avem

$$e_2' = -\frac{4}{9}e_1 - \frac{1}{9}e_2 = \left(-\frac{4}{9}, -\frac{1}{9}, 0\right).$$

În final, considerăm $e_3' = c_{31}e_1 + c_{32}e_2 + c_{33}e_3$ şi determinăm scalarii $c_{31}, c_{32}, c_{33} \in \mathbb{R}$ din sistemul

$$\begin{cases} \mathcal{A}(e_3', e_1) = 0 \\ \mathcal{A}(e_3', e_2) = 0 \\ \mathcal{A}(e_3', e_3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{31} - 4c_{32} - 8c_{33} = 0 \\ -4c_{31} + 7c_{32} - 4c_{33} = 0 \\ -8c_{31} - 4c_{32} + c_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c_{31} = -\frac{8}{81},\ c_{32} = -\frac{4}{81},\ c_{33} = \frac{1}{81},$$

adică avem

$$e_3' = -\frac{8}{81}e_1 - \frac{4}{81}e_2 + \frac{1}{81}e_3 = \left(-\frac{8}{81}, -\frac{4}{81}, \frac{1}{81}\right).$$

■

Problema 5.2.6 *Să se determine valorile parametrului $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care formele pătratice de mai jos sunt pozitiv definite sau negativ definite.*

a) $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = \lambda x_1^2 + (\lambda + 3)x_2^2 - 4x_1x_2$.

b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = \lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Rezolvare. a) Matricea în baza canonică a formei pătratice Q este

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

iar determinanţii corespunzători sunt

$$\Delta_1 = \lambda,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 4.$$

Conform Criteriului lui Sylvester, forma pătratică Q este pozitiv definită dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 0 \\ \lambda^2 + 3\lambda - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in (0, \infty) \\ \lambda \in (-\infty, -4) \cup (1, \infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda \in (1, \infty).$$

Forma pătratică Q este negativ definită dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 0 \\ \lambda^2 + 3\lambda - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in (-\infty, 0) \\ \lambda \in (-\infty, -4) \cup (1, \infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda \in (-\infty, -4).$$

b) Matricea în baza canonică a formei pătratice Q este

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 8 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

iar determinanţii corespunzători sunt

$$\Delta_1 = \lambda,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 8 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 8(\lambda - 8),\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} \lambda & 8 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(\lambda - 8).$$

Conform Criteriului lui Sylvester, forma pătratică Q este pozitiv definită dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 0 \\ \lambda - 8 > 0 \\ \lambda - 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda \in (8, \infty).$$

Forma pătratică Q este negativ definită dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 0 \\ \lambda - 8 > 0 \\ \lambda - 8 < 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda \in \emptyset.$$

■

Problema 5.2.7 *Utilizând metoda valorilor proprii, să se găsească forma canonică şi signatura formelor pătratice de mai jos. Care dintre aceste forme pătratice sunt pozitiv definite şi care sunt negativ definite? Să se precizeze baza spaţiului în care se obţine forma canonică respectivă.*

a) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = -x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Rezolvare. a) Matricea în baza canonică a formei pătratice Q este

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2)(\lambda+7) = 0,$$

adică avem valorile proprii $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ şi $\lambda_3 = -7$. Prin urmare, forma canonică a formei pătratice Q este

$$Q(x') = 2x_2'^2 - 7x_3'^2.$$

Signatura formei pătratice Q este $\sigma(Q) = (1, 1, 1)$, adică forma pătratică nu este nici pozitiv definită, nici negativ definită.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 0$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(3z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

O bază a subspaţiului propriu V_{λ_1} este $B_1 = \{f_1 = (3, -2, 1)\}$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = 2$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(z, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

O bază a subspaţiului propriu V_{λ_2} este $B_2 = \{f_2 = (1, 2, 1)\}$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_3 = -7$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_3} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \left(x, \frac{x}{2}, -2x\right) \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

O bază a subspaţiului propriu V_{λ_3} este $B_3 = \{f_3 = (2, 1, -4)\}$.

Baza în care se obţine forma canonică a lui Q este baza ortonormată $B' = \{e_1', e_2', e_3'\}$, unde

$$\begin{aligned} e_1' &= \frac{f_1}{||f_1||} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, -2, 1), \\ e_2' &= \frac{f_2}{||f_2||} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1), \\ e_3' &= \frac{f_3}{||f_3||} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2, 1, -4). \end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, transformarea ortogonală

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{14} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{21} \\ -2/\sqrt{14} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{21} \\ 1/\sqrt{14} & 1/\sqrt{6} & -4/\sqrt{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

conduce la forma canonică a formei pătratice Q.

b) Matricea în baza canonică a formei pătratice Q este

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 7)^2(\lambda + 2) = 0,$$

adică avem valorile proprii $\lambda_1 = 7$ şi $\lambda_2 = -2$, de multiplicitate algebrică $m_1 = 2$ şi $m_2 = 1$. Prin urmare, forma canonică a formei pătratice Q este

$$Q(x') = 7x_1'^2 + 7x_2'^2 - 2x_3'^2.$$

Signatura formei pătratice Q este $\sigma(Q) = (2, 1, 0)$, adică forma pătratică nu este nici pozitiv definită, nici negativ definită.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 7$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(x, -2x - 2z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

O bază a subspaţiului propriu V_{λ_1} este

$$B_1 = \{f_1 = (1, -2, 0), f_2 = (0, -2, 1)\}.$$

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = -2$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(2y, y, 2y) \mid y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

O bază a subspaţiului propriu V_{λ_2} este $B_2 = \{f_3 = (2, 1, 2)\}$.

Ortonormând prin Procedeul Gramm-Schmidt baza $B = \{f_1, f_2, f_3\}$, găsim baza ortonormată $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, unde

$$\begin{aligned} e'_1 &= \frac{\sqrt{5}}{5}(1, -2, 0), \\ e'_2 &= \frac{\sqrt{5}}{15}(-4, -2, 5), \\ e'_3 &= \frac{1}{3}(2, 1, 2), \end{aligned}$$

în care se obţine forma canonică a lui Q. Cu alte cuvinte, transformarea ortogonală

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 & -4\sqrt{5}/15 & 2/3 \\ -2\sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/15 & 1/3 \\ 0 & 5\sqrt{5}/15 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

conduce la forma canonică a formei pătratice Q. ■

Problema 5.2.8 *Fie* $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *o formă pătratică exprimată în baza canonică prin*

$$Q(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

Utilizând metodele Gauss, Jacobi şi a valorilor proprii, să se reducă Q la forma canonică (fără a se preciza neapărat baza în care se obţine aceasta) şi apoi să se verifice Teorema de Inerţie.

Rezolvare. Metoda lui Gauss: Deoarece în expresia lui Q avem pătrate, formăm pătrate perfecte şi obţinem

$$\begin{aligned} Q(x) &= 6x_2^2 - 4x_1x_2 + 5x_1^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_3 = \\ &= 6\left(x_2^2 - \frac{2}{3}x_1x_2\right) + 5x_1^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_3 = \\ &= 6\left[\left(x_2 - \frac{x_1}{3}\right)^2 - \frac{x_1^2}{9}\right] + 5x_1^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_3 = \\ &= 6\left(x_2 - \frac{x_1}{3}\right)^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_3 + \frac{13}{3}x_1^2 = \\ &= 6\left(x_2 - \frac{x_1}{3}\right)^2 + 4\left(x_3 - \frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{10}{3}x_1^2. \end{aligned}$$

Efectuând schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - \dfrac{x_1}{3} \\ x_2' = x_3 - \dfrac{x_1}{2} \\ x_3' = x_1, \end{cases}$$

găsim forma canonică

$$Q(x') = 6x_1'^2 + 4x_2'^2 + \frac{10}{3}x_3'^2.$$

Signatura formei pătratice Q este $\sigma(Q) = (3, 0, 0)$, adică forma pătratică este pozitiv definită.

Metoda lui Jacobi: Matricea în baza canonică a formei pătratice Q este

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

iar determinanţii corespunzători sunt

$$\Delta_1 = 5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 80.$$

Prin urmare, forma canonică este

$$Q(x'') = \frac{1}{5}x_1''^2 + \frac{5}{26}x_2''^2 + \frac{13}{40}x_3''^2.$$

Signatura formei pătratice Q este $\sigma(Q) = (3, 0, 0)$, adică forma pătratică este pozitiv definită.

Metoda valorilor proprii: Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 6-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda-8) = 0,$$

adică avem valorile proprii $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$ şi $\lambda_3 = 8$. Prin urmare, forma canonică a formei pătratice Q este

$$Q(x''') = 2x_1'''^2 + 5x_2'''^2 + 8x_3'''^2.$$

Signatura formei pătratice Q este $\sigma(Q) = (3, 0, 0)$, adică forma pătratică este pozitiv definită. ∎

5.3 Probleme propuse

Problema 5.3.1 *Să se studieze care din următoarele aplicaţii sunt forme biliniare şi simetrice:*

a) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1$;

b) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(x, y) = x_1y_3 + x_2y_2 - 3x_3y_1$;

c) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(x, y) = x_1^2y_2 + x_3y_1$.

R. a) Biliniară şi simetrică. b) Biliniară, dar nesimetrică. c) Nici biliniară, nici simetrică.

Problema 5.3.2 *Fie $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o formă biliniară şi simetrică, a cărei expresie analitică în baza canonică este*

$$\mathcal{A}(x, y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 3x_3y_3.$$

a) *Să se scrie matricea lui $\mathcal{A}$ în baza canonică şi în baza*

$$B' = \{e_1' = (1, 1, 0), e_2' = (1, 0, 1), e_3' = (0, 1, 1)\}.$$

b) *Să se determine forma pătratică asociată lui $\mathcal{A}$.*

R. a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.
b) $Q(x) = \mathcal{A}(x, x) = 4x_1x_2 - 3x_3^2$.

Problema 5.3.3 *Pentru formele pătratice $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de mai jos, să se determine formele biliniare şi simetrice din care provin, precum şi matricea lor în baza canonică:*

a) $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$.

b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$.

c) $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 - x_3x_4$.

R. a) $\mathcal{A}(x, y) = 4x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.
b) $\mathcal{A}(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 5x_2y_2 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2 + 7x_3y_3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.
c) $\mathcal{A}(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_4y_4 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - \frac{1}{2}x_3y_4 - \frac{1}{2}x_4y_3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema 5.3.4 *Formele pătratice $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de mai jos sunt date în baza canonică B a lui $\mathbb{R}^n$. Să se scrie aceste forme în baza*

$$B' = \{e_1', e_2', ..., e_n'\} \subset \mathbb{R}^n,$$

în cazurile:

a) $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 25x_1^2 - 14x_1x_2 + 2x_2^2$, $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = -e_1 + e_2$.

b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$, $e_1' = 2e_1 - e_3$, $e_2' = -e_1 + 2e_2 - e_3$, $e_3' = -e_2 + e_3$.

c) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$, $e_1' = e_1 + e_2 - 2\sqrt{2}e_3$, $e_2' = e_1 - e_2$, $e_3' = \sqrt{2}e_1 + \sqrt{2}e_2 + e_3$.

d) $Q:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}, Q(x)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4,\ e_1'=e_1+e_2+e_3+e_4,$ $e_2'=e_2+e_3+e_4,\ e_3'=e_3+e_4,\ e_4'=e_4.$

R. a) $Q(x')=13x_1'^2-46x_1'x_2'+41x_2'^2.$
b) $Q(x')=7x_1'^2+3x_1'x_2'-6x_1'x_3'-11x_2'^2+11x_2'x_3'-2x_3'^2.$
c) $Q(x')=20x_1'^2+8x_2'^2+35x_3'^2.$
d) $Q(x')=3x_1'^2+2x_2'^2+x_3'^2+5x_1'x_2'+3x_1'x_3'+x_1'x_4'+3x_2'x_3'+x_2'x_4'+x_3'x_4'.$

Problema 5.3.5 *Utilizând metoda lui Gauss, să se găsească forma canonică şi signatura formelor pătratice de mai jos. Care dintre aceste forme pătratice sunt pozitiv definite şi care sunt negativ definite?*

a) $Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ Q(x)=x_1^2-x_1x_2-x_2^2.$

b) $Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ Q(x)=-16x_1^2+24x_1x_2-9x_2^2.$

c) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ Q(x)=x_1^2+2x_1x_2+9x_2^2+4x_1x_3+19x_3^2.$

d) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ Q(x)=9x_1^2-12x_1x_2-6x_1x_3+4x_2^2+4x_2x_3+x_3^2.$

e) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ Q(x)=8x_1^2+16x_1x_2+8x_2^2+4x_1x_3+4x_2x_3+x_3^2.$

f) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ Q(x)=x_1x_2-x_1x_3+2x_2x_3.$

g) $Q:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R},\ Q(x)=x_1x_2+2x_2x_3-3x_3x_4.$

R. a) $Q(x')=x_1'^2-\frac{5}{4}x_2'^2$, unde $x_1'=x_1-\frac{x_2}{2}$; $x_2'=x_2$.
b) $Q(x')=-x_1'^2$, unde $x_1'=4x_1-3x_2$; $x_2'=x_2$.
c) $Q(x')=x_1'^2+8x_2'^2+\frac{29}{2}x_3'^2$, unde $x_1'=x_1+x_2+2x_3$; $x_2'=x_2-\frac{x_3}{4}$; $x_3'=x_3$.
d) $Q(x')=x_1'^2$, unde $x_1'=3x_1-2x_2-x_3$; $x_2'=x_2$; $x_3'=x_3$.
e) $Q(x')=8x_1'^2+\frac{1}{2}x_2'^2$, unde $x_1'=x_1+x_2+\frac{x_3}{4}$; $x_2'=x_3$; $x_3'=x_2$.
f) $Q(x'')=x_1''^2-x_2''^2+2x_3''^2$, unde $x_1''=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)$; $x_2''=\frac{1}{2}(x_1-x_2+3x_3)$; $x_3''=x_3$.
g) $Q(x''')=x_1'''^2-x_2'''^2-3x_3'''^2+3x_4'''^2$, unde $x_1'''=\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}+x_3$; $x_2'''=\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}+x_4$; $x_3'''=\frac{1}{2}(x_3+x_4)$; $x_4'''=\frac{1}{2}(x_3-x_4)$.

Problema 5.3.6 *Utilizând metoda lui Jacobi, să se găsească forma canonică şi signatura formelor pătratice de mai jos. Care dintre aceste forme pătratice sunt pozitiv definite şi care sunt negativ definite? Să se precizeze baza spaţiului în care se obţine forma canonică respectivă.*

a) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$.

b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

c) $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 6x_3x_4$.

d) $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 6x_3x_4$.

R. a) $Q(x') = x_1'^2 - x_2'^2 - \frac{1}{4}x_3'^2$;
$B' = \left\{e_1' = (1,0,0), e_2' = (2,-1,0), e_3' = -\frac{1}{4}(1,-2,1)\right\}$.
b) $Q(x') = x_1'^2 - \frac{1}{3}x_2'^2 + \frac{1}{3}x_3'^2$;
$B' = \left\{e_1' = (1,0,0), e_2' = -\frac{1}{3}(2,1,0), e_3' = -\frac{1}{3}(1,1,-1)\right\}$.
c) $Q(x') = x_1'^2 + x_2'^2 - \frac{1}{3}x_3'^2 - \frac{3}{5}x_4'^2$;
$B' = \Big\{e_1' = (1,0,0,0), e_2' = (0,1,0,0), e_3' = \frac{1}{3}(0,2,-1,0),$
$e_4' = \frac{1}{5}(0,5,-1,-3)\Big\}$.
d) $Q(x') = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 + \frac{1}{2}x_4'^2$;
$B' = \{e_1' = (1,0,0,0), e_2' = (0,1,0,0), e_3' = (2,1,-1,0),$
$e_4' = \frac{1}{2}(-1,-1,0,1)\Big\}$.

Problema 5.3.7 *Să se determine valorile parametrului $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care formele pătratice de mai jos sunt pozitiv definite sau negativ definite.*

a) $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + (\lambda+3)x_2^2 - 2(\lambda+1)x_1x_2$.

b) $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = -9x_1^2 + 6\lambda x_1x_2 - x_2^2$.

c) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

d) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = (4-\lambda)x_1^2 + (4-\lambda)x_2^2 - (2+\lambda)x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$.

R. a) Q pozitiv definită $\Leftrightarrow \lambda \in (-2,1)$; Q negativ definită $\Leftrightarrow \lambda \in \emptyset$.
b) Q pozitiv definită $\Leftrightarrow \lambda \in \emptyset$; Q negativ definită $\Leftrightarrow \lambda \in (-1,1)$.
c) Q pozitiv definită $\Leftrightarrow \lambda \in \emptyset$; Q negativ definită $\Leftrightarrow \lambda \in \emptyset$.
d) Q pozitiv definită $\Leftrightarrow \lambda \in (-\infty,-6)$; Q negativ definită $\Leftrightarrow \lambda \in (6,\infty)$.

Problema 5.3.8 *Utilizând metoda valorilor proprii, să se găsească forma canonică şi signatura formelor pătratice de mai jos. Care dintre aceste forme pătratice sunt pozitiv definite şi care sunt negativ definite? Să se precizeze baza spaţiului în care se obţine forma canonică respectivă.*

a) $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2$.

b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

c) $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

R. a) $Q(x') = 3x_1'^2 + 7x_2'^2$;
$B' = \left\{ e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \right\}$.
b) $Q(x') = 2x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$;
$B' = \left\{ e_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), e_3' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1) \right\}$.
c) $Q(x') = 4x_1'^2 - 4x_2'^2 + 2x_3'^2 - 2x_4'^2$;
$B' = \left\{ e_1' = \frac{1}{2}(-1,-1,1,1), e_2' = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1), e_3' = \frac{1}{2}(-1,1,1,-1), \right.$
$\left. e_4' = \frac{1}{2}(1,1,1,1) \right\}$.

Problema 5.3.9 *Fie* $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *o formă pătratică exprimată în baza canonică prin*

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Utilizând metodele Gauss, Jacobi şi a valorilor proprii, să se reducă Q *la forma canonică (precizându-se baza în care se obţine aceasta) şi apoi să se verifice Teorema de Inerţie.*

Ind. Metoda lui Gauss: $Q(x') = x_1'^2 + \frac{3}{4}x_2'^2 + \frac{2}{3}x_3'^2$; **Metoda lui Jacobi:** $Q(x'') = x_1''^2 + \frac{4}{3}x_2''^2 + \frac{4}{5}x_3''^2$; **Metoda transformărilor ortogonale:** $Q(x''') = 2x_1'''^2 + \frac{1}{2}x_2'''^2 + \frac{1}{2}x_3'''^2$.

Capitolul 6

Conice

6.1 Elemente teoretice fundamentale

Fie spaţiul punctual euclidian al vectorilor liberi din plan $\mathcal{E}_2 = (E_2, V_2, \varphi)$ şi $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ un reper ortonormat în acest spaţiu. O *curbă plană regulată definită implicit* în spaţiul $\mathcal{E}_2$, curbă notată cu C, este o mulţime de puncte din plan $P(x, y)$, ale căror coordonate satisfac o relaţie de forma

$$C : f(x, y) = 0,$$

unde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie diferenţiabilă, cu proprietatea

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (P) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (P) \neq 0, \quad \forall\ P \in C.$$

Definiţia 6.1.1 *În particular, se numeşte* ***conică*** *sau* ***curbă algebrică de grad doi,*** *o curbă* $\Gamma : f(x, y) = 0$ *definită de o funcţie polinomială de gradul al doilea*

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Forma pătratică $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ se numeşte *forma pătratică asociată conicei* Γ.

Definiţia 6.1.2 *Se numesc* ***invarianţii ortogonali*** *ai conicei* Γ *(aceştia nu se modifică la roto-translaţii în plan) numerele reale*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I = a_{11} + a_{22}.$$

Aceşti invarianţi sunt numiţi: Δ-*invariantul cubic*, δ-*invariantul pătratic* şi I-*invariantul liniar*. Matricea care determină invariantul cubic Δ se numeşte *matricea conicei* Γ.

Teorema 6.1.1 *O conică $\Gamma : f(x,y) = 0$ admite un centru de simetrie $C(x_0, y_0)$ dacă şi numai dacă $\delta \neq 0$. În această situaţie, coordonatele x_0 şi y_0 ale centrului de simetrie C se obţin prin rezolvarea sistemului liniar*

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0, \end{cases}$$

unde $f_x = \partial f/\partial x$ şi $f_y = \partial f/\partial y$.

Teorema 6.1.2 (reducerea la forma canonică a conicelor) *Să considerăm conica $\Gamma : f(x,y) = 0$ şi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ soluţiile* ***ecuaţiei seculare*** *(valorile proprii ale matricii formei pătratice asociate conicei)*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - I\lambda + \delta = 0.$$

În acest context, avem:

1. *dacă $\delta \neq 0$ (conică cu centru), atunci există un sistem de coordonate $X\mathcal{O}Y$, obţinut printr-o roto-translaţie a sistemului de coordonate xOy, în raport cu care conica Γ are ecuaţia canonică*

$$\Gamma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

2. *dacă $\delta = 0$ (conică fără centru) şi $\Delta \neq 0$ (conică nedegenerată), atunci forma canonică a conicei Γ* este

$$\Gamma : Y^2 = \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}}X.$$

3. *dacă $\delta = 0$ (conică fără centru) şi $\Delta = 0$ (conică degenerată), atunci forma canonică a conicei Γ este mulţimea vidă sau reuniunea de drepte paralele sau confundate*

$$\Gamma : (Y - k)(Y + k) = 0, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Corolarul 6.1.3 (clasificarea conicelor după invarianţi) *Fie o conică arbitrară $\Gamma : f(x,y) = 0$. În acest context, avem următoarea clasificare a conicelor:*

- *dacă conica* Γ *este* ***nedegenerată*** $(\Delta \neq 0)$ *atunci:*
  - *pentru* $\delta > 0$ *conica* Γ *este* ***mulţimea vidă*** $(I \cdot \Delta > 0)$ *sau* ***elipsă*** $(I \cdot \Delta < 0)$*;*
  - *pentru* $\delta < 0$ *conica* Γ *este* ***hiperbolă;***
  - *pentru* $\delta = 0$ *conica* Γ *este* ***parabolă.***
- *dacă conica* Γ *este* ***degenerată*** $(\Delta = 0)$ *atunci:*
  - *pentru* $\delta > 0$ *conica* Γ *este un* ***punct dublu;***
  - *pentru* $\delta < 0$ *conica* Γ este ***reuniunea a două drepte concurente;***
  - *pentru* $\delta = 0$ *conica* Γ *este* ***mulţimea vidă*** *sau* ***reuniunea a două drepte paralele*** *sau* ***confundate.***

Reducerea conicelor la forma canonică
– Metoda roto-translaţiei –

1. Determinăm valorile proprii λ_1 şi λ_2 ale matricii formei pătratice asociate conicei
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$
rezolvând ecuaţia caracteristică (*ecuaţia seculară*)
$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - I\lambda + \delta = 0.$$

2. Calculăm subspaţiile proprii V_{λ_1} şi V_{λ_2} şi determinăm nişte *vectori proprii ortonormaţi* $\overline{e}_1 = (\xi_1, \xi_2)$ şi $\overline{e}_2 = (\eta_1, \eta_2)$. Efectuând eventual o renumerotare a vectorilor proprii ortonormaţi, scriem matricea de rotaţie
$$R = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix},$$
astfel încât $\det R = 1$.

3. Efectuăm rotaţia
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

şi ajungem la o ecuaţie de forma

$$\Gamma : \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0,$$

unde $a'_{ij} \in \mathbb{R}$.

4. Restrângem pătratele (dacă este cazul) şi obţinem

$$\Gamma : \lambda_1 \left(x' + \frac{a'_{13}}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{23}}{\lambda_2} \right)^2 + a''_{33} = 0,$$

unde

$$a''_{33} = a'_{33} - \frac{a'^2_{13}}{\lambda_1} - \frac{a'^2_{23}}{\lambda_2}.$$

5. Efectuăm translaţia

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{a'_{13}}{\lambda_1} \\ Y = y' + \dfrac{a'_{23}}{\lambda_2}, \end{cases}$$

şi găsim forma canonică

$$\Gamma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a''_{33} = 0.$$

6. În ultimul sistem de coordonate $X\mathcal{O}Y$ reprezentăm grafic conica Γ.

Definiţia 6.1.3 *Fie $\Gamma : f(x, y) = 0$ o conică şi $\overline{v} = l\overline{i} + h\overline{j}$ o direcţie în plan. Locul geometric descris de mijloacele coardelor conicei Γ, paralele cu direcţia $\overline{v}$, se numeşte* ***diametru conjugat*** *direcţiei $\overline{v}$.*

Propoziţia 6.1.4 *Diametrul conjugat direcţiei $\overline{v} = l\overline{i} + h\overline{j}$, relativ la conica $\Gamma : f(x, y) = 0$, este o porţiune din dreapta de ecuaţie*

$$D_{\overline{v}} : lf_x + hf_y = 0.$$

Corolarul 6.1.5 *Diametrul conjugat direcţiei dreptei $d : y = mx + n$, relativ la conica $\Gamma : f(x, y) = 0$, este o porţiune din dreapta de ecuaţie*

$$D_d : f_x + mf_y = 0.$$

Prin calcul, se deduce că panta m' a diametrului conjugat direcţiei dreptei $d : y = mx + n$ este exprimată de *relaţia de conjugare*

$$m' = -\frac{a_{11} + ma_{12}}{a_{12} + ma_{22}}.$$

Două drepte d şi d', ce trec prin centrul unei conice Γ (în cazul în care acesta există) şi ale căror pante m, respectiv m', verifică relaţia de conjugare se numesc *diametri conjugaţi* unul altuia.

Doi *diametri autoconjugaţi* ($m = m'$) definesc *asimptotele* conicei Γ.

Teorema 6.1.6 *Singurele conice care admit asimptote sunt conicele Γ de tip hiperbolă ($\Delta \neq 0$, $\delta < 0$). Acestea admit două asimptote de ecuaţii*

$$\mathcal{A}_{1,2} : f_x + m_{1,2} f_y = 0,$$

unde $m_{1,2}$ sunt soluţiile ecuaţiei $a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0$.

Doi diametri conjugaţi perpendiculari ($m \cdot m' = -1$), unde m nu este direcţie asimptotică, definesc *axele de simetrie* ale conicei Γ.

Teorema 6.1.7 *a) O conică Γ de tip elipsă sau hiperbolă ($\Delta \neq 0$, $\delta \neq 0$) admite două axe de simetrie*

$$\mathcal{S}_{1,2} : f_x + m_{1,2} f_y = 0,$$

unde $m_{1,2}$ sunt soluţiile ecuaţiei $a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0$.

b) O conică Γ de tip parabolă ($\Delta \neq 0$, $\delta = 0$) admite o singură axă de simetrie

$$\mathcal{S} : a_{11} f_x + a_{12} f_y = 0 \Leftrightarrow \mathcal{S} : a_{12} f_x + a_{22} f_y = 0.$$

Definiţia 6.1.4 *Fie $\Gamma : f(x, y) = 0$ o conică şi $P(x_0, y_0)$ un punct arbitrar din plan. Dreapta de ecuaţie*

$$\mathcal{P}_P\Gamma : (x - x_0) f_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f_y(x_0, y_0) + 2f(x_0, y_0) = 0$$

se numeşte ***polara de pol** P **a conicei** Γ.*

Polara unui pol $P(x_0, y_0)$ care aparţine conicei $\Gamma : f(x, y) = 0$ este exact *dreapta tangentă în P* la conica Γ. Ecuaţia acestei tangente este

$$T_P\Gamma : (x - x_0) f_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f_y(x_0, y_0) = 0$$

iar ecuaţia *dreptei normale în P* la conica Γ este

$$N_P\Gamma : \frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)}.$$

Definiţia 6.1.5 *Fie* $\Gamma_1 : f_1(x,y) = 0$ *şi* $\Gamma_2 : f_2(x,y) = 0$ *două conice. Mulţimea tuturor conicelor de ecuaţii*

$$\Gamma_\lambda : f_1(x,y) + \lambda f_2(x,y) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

se numeşte ***fascicolul de conice*** *determinat de* Γ_1 *şi* Γ_2*.*

Fascicolul de conice Γ_λ determinat de Γ_1 şi Γ_2 conţine punctele de intersecţie $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ ale conicelor Γ_1 şi Γ_2 şi nu conţine conica Γ_2.

Propoziţia 6.1.8 *a) Fascicolul de conice care trec prin patru puncte distincte* $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ *şi* $D(x_4,y_4)$ *este determinat de ecuaţia*

$$\Gamma_\lambda : (AB)(CD) + \lambda(AD)(BC) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

unde (AB), (CD), (AD) *şi* (BC) *reprezintă ecuaţiile dreptelor* AB, CD, AD *şi* BC*.*

b) Fascicolul de conice care circumscriu un triunghi ABC *are ecuaţia*

$$\Gamma_{\lambda,\mu} : (AB)(AC) + \lambda(BA)(BC) + \mu(CA)(CB) = 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

În particular, fascicolul de conice care trec *bitangent* prin punctele de intersecţie ale unei conice $\Gamma : f(x,y) = 0$ cu o dreaptă dată Δ este descris de ecuaţia

$$\Gamma_\lambda : f(x,y) + \lambda\Delta^2 = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mai mult, fascicolul de conice tangente dreptelor Δ_1 şi Δ_2 în punctele în care aceste drepte intersectează dreapta Δ este descris de ecuaţia

$$\Gamma_\lambda : \Delta_1\Delta_2 + \lambda\Delta^2 = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Propoziţia 6.1.9 *Prin cinci puncte distincte* $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, $D(x_4,y_4)$ *şi* $E(x_5,y_5)$ *trece o singură conică, descrisă de ecuaţia*

$$\Gamma : \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6.2 Probleme rezolvate

Problema 6.2.1 *Să se scrie ecuaţia cercului cu centrul pe dreapta*

$$d : x - 2y + 1 = 0,$$

tangent axei Ox şi care trece prin punctul $A(0,1)$.

Rezolvare. Să presupunem ca cercul căutat are raza $R > 0$ şi centrul C de coordonate (α, β). Ecuaţia cercului este atunci

$$\mathcal{C} : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

Cercul $\mathcal{C}$ fiind tangent axei Ox de ecuaţie $y = 0$, avem $d(C, Ox) = |\beta| = R$. Deoarece $C \in d$ şi $A \in \mathcal{C}$, deducem că

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta + 1 = 0 \\ \alpha^2 + (1-\beta)^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta + 1 = 0 \\ \alpha^2 - 2\beta + 1 = 0. \end{cases}$$

Coordonatele centrului cercului sunt soluţiile $C_1(0, 1/2)$ sau $C_2(1,1)$. Aceasta înseamnă că avem de-a face cu două cercuri de raze $R_1 = 1/2$ şi $R_2 = 1$. Ecuaţiile celor două cercuri găsite sunt

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad \mathcal{C}_2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

■

Problema 6.2.2 *Să se determine locul geometric al punctelor din plan care au proprietatea că tangentele la elipsa*

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0,$$

prin aceste puncte, sunt perpendiculare.

Rezolvare. Fie $M(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, un punct variabil în plan, care verifică proprietatea cerută de problemă. Fascicolul de drepte care trec prin M este descris de ecuaţiile $d_m : y - \beta = m(x - \alpha)$, $m \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. O dreaptă d_m a fascicolului este tangentă la elipsă dacă sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0 \\ y - \beta = m(x - \alpha) \end{cases}$$

are o singură soluţie (dreapta şi elipsa au un singur punct comun). Scoţând y din a doua ecuaţie şi introducând în prima, obţinem o ecuaţie de gradul al doilea, al cărei discriminant trebuie să se anuleze. Cu alte cuvinte, în urma calculelor, sistemul are singură soluţie dacă

$$(4-\alpha^2)m^2 + 2\alpha\beta m + 9 - \beta^2 = 0.$$

În condiţiile în care discriminantul ultimei ecuaţii $\Delta = 4(9\alpha^2 + 4\beta^2 - 36)$ este strict pozitiv găsim două soluţii distincte m_1 şi m_2 ale ultimei ecuaţii, soluţii care reprezintă pantele celor două tangente prin M.la elipsă. Punând condiţia ca tangentele d_{m_1} şi d_{m_2} să fie perpendiculare, obţinem relaţia $m_1 m_2 + 1 = 0$. Folosind relaţiile lui Viéte, deducem că $\alpha^2+\beta^2 = 13$. Cu alte cuvinte, locul geometric descris de punctul M reprezintă un cerc centrat în originea $O(0,0)$ şi de rază $R = \sqrt{13}$. ■

Problema 6.2.3 *Să se arate că tangentele la o hiperbolă formează cu asimptotele triunghiuri de arie constantă.*

Rezolvare. Fie $M(a\cosh t, b\sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$, un punct mobil al hiperbolei de ecuaţie

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad a, b > 0,$$

unde $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$ şi $\sinh t = (e^t - e^{-t})/2$. Ecuaţia tangentei în M la hiperbolă se obţine prin dedublare

$$T_M H : \frac{x\cosh t}{a} - \frac{y\sinh t}{b} - 1 = 0.$$

Punctele ei de intersecţie cu asimptotele

$$d_{1,2} : y = \pm\frac{b}{a}x$$

sunt punctele $M_1(ae^t, be^t)$ şi $M_2(ae^{-t}, -be^{-t})$. În concluzie, aria triunghiului ΔOM_1M_2 se calculează după formula

$$\mathcal{A}_{\Delta OM_1M_2} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ ae^t & be^t & 1 \\ ae^{-t} & -be^{-t} & 1 \end{vmatrix} = ab = const.$$

■

Problema 6.2.4 *Să se calculeze invarianţii ortogonali şi să se scrie forma canonică a conicelor*

a) $\Gamma_1 : 5x^2 - 4xy + 2y^2 - 16x + 4y - 22 = 0$;

b) $\Gamma_2 : 11x^2 - 24xy + 4y^2 + 2x + 16y + 11 = 0$;

c) $\Gamma_3 : x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 6 = 0$.

Rezolvare. a) Matricea conicei Γ_1 este matricea simetrică

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -8 \\ -2 & 2 & 2 \\ -8 & 2 & -22 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, invarianţii conicei Γ_1 sunt:

$$\Delta = \det A_1 = -216,\ \delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \text{ şi } I = a_{11} + a_{22} = 7.$$

Deoarece $\delta \neq 0$, rezultă că forma canonică a conicei Γ_1 se descrie după formula

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

unde $\lambda_{1,2}$ sunt valorile proprii ale matricii $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. În concluzie, ecuaţia redusă a conicei este elipsa

$$\frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{36} - 1 = 0.$$

b) Matricea conicei Γ_2 este matricea simetrică

$$A_2 = \begin{pmatrix} 11 & -12 & 1 \\ -12 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

iar invarianţii sunt $\Delta = -2000$, $\delta = -100$ şi $I = 15$. Ecuaţia redusă a conicei este hiperbola

$$X^2 - \frac{Y^2}{4} + 1 = 0.$$

c) Matricea conicei Γ_3 este matricea simetrică

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

iar invarianţii sunt $\Delta = -4$, $\delta = 0$ şi $I = 2$. Deoarece $\delta = 0$, forma canonică a conicei Γ_3 se descrie după formula

$$Y^2 = \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}}X.$$

În concluzie, ecuaţia redusă a conicei Γ_3 este o parabolă, care are o ecuaţie de forma $Y^2 = \sqrt{2}X$ sau $Y^2 = -\sqrt{2}X$. ■

Problema 6.2.5 *Să se stabilească natura şi genul conicelor:*

a) $\Gamma_1 : 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;

b) $\Gamma_2 : 7x^2 - 8xy + y^2 - 6x - 12y - 9 = 0$;

c) $\Gamma_3 : 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$.

Rezolvare. a) Din cauză că $\Delta = -81 \neq 0$, avem de-a face cu o conică nedegenerată. Invariantul $\delta = 9$ fiind strict pozitiv, rezultă că Γ_1 este de gen elipsă. Deoarece $I \cdot \Delta = -810 < 0$, rezultă că Γ_1 este o elipsă.

b) Deoarece $\Delta = -324 \neq 0$ şi $\delta = -9 < 0$, rezultă că Γ_2 este o hiperbolă.

c) Având $\Delta = -225 \neq 0$ şi $\delta = 0$, înseamnă că Γ_3 este o parabolă. ■

Problema 6.2.6 *Să se reducă la forma canonică şi să se precizeze natura şi genul următoarele conice, punându-se în evidenţă roto-translaţiile plane efectuate:*

a) $\Gamma_1 : 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0$;

b) $\Gamma_2 : 2x^2 - 2\sqrt{3}xy + 9 = 0$;

c) $\Gamma_3 : 2x^2 + 6xy + 10y^2 - 121 = 0$;

d) $\Gamma_4 : 8x^2 + 6xy + 6x + 3y + 1 = 0$;

e) $\Gamma_5 : 2x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$.

Rezolvare. a) Utilizând metoda vectorilor şi valorilor proprii (a transformărilor ortogonale), reducem la forma canonică forma pătratică

$$q_1(x, y) = 9x^2 - 24xy + 16y^2,$$

asociată conicei Γ_1. Rezolvând ecuaţia seculară

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -12 \\ -12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda = 0,$$

găsim valorile proprii simple $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = 25$. Baze ortonormate în subspaţiile proprii corespunzătoare sunt

$$B_1 = \left\{ \overline{e}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) \right\} \text{ şi } B_2 = \left\{ \overline{e}_2 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right) \right\}.$$

Acestea produc schimbarea de coordonate (rotaţia directă, de determinant pozitiv, egal cu unu)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(3x' + 4y') \\ y = \frac{1}{5}(-4x' + 3y'). \end{cases}$$

Înlocuind în expresia care defineşte conica Γ_1 coordonatele x şi y cu expresiile din formulele de rotaţie, în urma calculelor, găsim

$$\Gamma_1 : 25x'^2 - 20x' + 5y' + 4 = 0 \Leftrightarrow \Gamma_1 : 25 \left(x'^2 - \frac{4}{5}x' \right) + 5y' + 4 = 0.$$

Efectuând prin metoda formării de pătrate translaţia sistemului de axe $x'Oy'$ în sistemul de axe $x''O'y''$, unde $O'(2/5, 0)$, translaţie definită de relaţiile

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{2}{5} \\ y'' = y', \end{cases}$$

deducem că conica Γ_1 este parabola $y'' = -x''^2/5$.

b) Forma pătratică $q_2(x, y) = 2x^2 - 2\sqrt{3}xy$ are matricea

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale acestei matrici sunt $\lambda_1 = 3$ şi $\lambda_2 = -1$. Bazele ortonormate a subspaţiilor proprii asociate sunt

$$B_1 = \left\{ \overline{e}_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\} \text{ şi } B_2 = \left\{ \overline{e}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\},$$

care conduc la rotaţia directă

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Înlocuind în expresia lui Γ_2 pe x şi y din formulele

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x' - \sqrt{3}y') \\ y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y'), \end{cases}$$

în urma calculelor, obţinem hiperbola

$$\Gamma_2 : -x'^2 + 3y'^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \Gamma_2 : \frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{3} = 1.$$

c) Utilizând metoda transformărilor ortogonale, forma pătratică $q_3(x, y) = 2x^2 + 6xy + 10y^2$ se reduce la forma canonică în baza ortonormată

$$B = \left\{ \overline{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right), \overline{e}_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right) \right\} \subset \mathbb{R}^2,$$

obţinută prin reuniunea bazelor ortonormate de vectori proprii corespunzători valorilor proprii $\lambda_1 = 11$ şi $\lambda_2 = 1$. În concluzie, schimbările de coordonate ale rotaţiei directe sunt

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y'). \end{cases}$$

În urma calculelor, obţinem $\Gamma_3 : 11x'^2 + y'^2 - 121 = 0$. Cu alte cuvinte, conica Γ_3 este elipsa

$$\Gamma_3 : \frac{x'^2}{11} + \frac{y'^2}{121} = 1.$$

d) Deoarece valorile proprii ale matricii formei pătratice asociate conicei Γ_4 sunt $\lambda_1 = 9$ şi $\lambda_2 = -1$ iar bazele ortonormate sunt

$$B_1 = \left\{ \overline{e}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right) \right\} \text{ şi } B_2 = \left\{ \overline{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}} \right) \right\},$$

rezultă că formulele de rotaţie directă sunt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x' + y'). \end{cases}$$

Acestea conduc la conica

$$\Gamma_4 : 9y'^2 - x'^2 + \frac{21}{\sqrt{10}}y' - \frac{3}{\sqrt{10}}x' + 1 = 0$$

Formând pătrate perfecte în x' şi y' şi folosind translaţia

$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{3}{2\sqrt{10}} \\ y'' = y' + \dfrac{7}{6\sqrt{10}}, \end{cases}$$

deducem forma canonică a conicei

$$\Gamma_4 : 9y''^2 - x''^2 = 0 \Leftrightarrow \Gamma_4 : (3y'' - x'')(3y'' + x'') = 0.$$

Cu alte cuvinte, conica Γ_4 este o conică degenerată, reprezentând reuniunea a două drepte concurente: $d_1 : y'' = 3x''$ şi $d_2 : y'' = -3x''$. În coordonatele iniţiale x şi y aceste drepte au ecuaţiile: $d_1 : x = -1/2$ şi $d_2 : 4x + 3y + 1 = 0$.

e) Deoarece forma pătratică $q_5(x, y) = 2x^2 + y^2$ a conicei Γ_5 este deja în formă canonică, rezultă că forma canonică a conicei Γ_5 se obţine doar printr-o translaţie, şi anume

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 3. \end{cases}$$

Ecuaţiile translaţiei se deduc în urma formării de pătrate

$$\Gamma_5 : 2[(x + 1)^2 - 1] + (y + 3)^2 - 9 + 12 = 0.$$

În concluzie, conica Γ_5 este o mulţime vidă sau, altfel spus, o elipsă imaginară descrisă de ecuaţia

$$\Gamma_5 : 2x'^2 + y'^2 + 1 = 0.$$

■

Problema 6.2.7 *Să se arate că locul geometric al centrelor conicelor care trec prin punctele $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 1)$ şi $D(1, 2)$ este o hiperbolă. Să se determine coordonatele centrului, ecuaţiile axelor de simetrie şi a asimptotelor acestei hiperbole.*

Rezolvare. Folosind formula care determină ecuaţia unei drepte ce trece prin două puncte, deducem că ecuaţiile carteziene ale dreptelor AB, CD, AD şi BC sunt

$$AB : y = 0,\ CD : x - y + 1 = 0,\ AD : y - 2x = 0,\ BC : x + 2y - 2 = 0$$

iar ecuaţia fascicolului de conice care circumscriu patrulaterul $ABCD$ este

$$\Gamma_\lambda : y(x - y + 1) + \lambda(y - 2x)(x + 2y - 2) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Gamma_\lambda : -2\lambda x^2 + (1 - 3\lambda)xy + (2\lambda - 1)y^2 + (1 - 2\lambda)y + 4\lambda x = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Coordonatele centrelor conicelor din fascicolul Γ_λ verifică sistemul de ecuaţii liniare obţinut prin derivări parţiale

$$\begin{cases} -4\lambda x + (1 - 3\lambda)y = -4\lambda \\ (1 - 3\lambda)x + 2(2\lambda - 1)y = 2\lambda - 1. \end{cases}$$

Pentru a determina locul geometric cerut de problemă nu este însă necesară rezolvarea sistemului ci doar eliminarea parmetrului λ, care conduce la relaţia de legătură între coordonatele x şi y ale centrelor. Prin urmare, eliminând parametrul λ din sistemul de mai sus, deducem că x şi y verifică ecuaţia conicei

$$\Gamma : 4x^2 - 8xy - 2y^2 + 9y - 4 = 0.$$

Invarianţii ortogonali ai conicei Γ sunt $\Delta = 15 \neq 0$ şi $\delta = -24 < 0$. Cu alte cuvinte, locul geometric descris de coordonatele centrelor conicelor care trec prin punctele A, B, C şi D este o hiperbolă.

Coordonatele centrului acestei hiperbole sunt $(3/4, 3/4)$ şi se obţin rezolvând sistemul liniar

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 8x + 4y = 9. \end{cases}$$

Ecuaţia "pantelor" axelor de simetrie ale hiperbolei Γ este

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 2 = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii sunt $m_1 = 2$ şi $m_2 = -1/2$. Ecuaţiile axelor de simetrie sunt atunci

$$\mathcal{S}_1 : f_x + m_1 f_y = 0 \Leftrightarrow 4x + 8y - 9 = 0,$$
$$\mathcal{S}_2 : f_x + m_2 f_y = 0 \Leftrightarrow 8x - 4y - 3 = 0.$$

Ecuaţia "pantelor" asimptotelor hiperbolei Γ este

$$a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 2 = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii sunt $m_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$. Ecuaţiile asimptotelor sunt

$$\begin{array}{l} \mathcal{A}_1 : f_x + m_1 f_y = 0 \Leftrightarrow (24 - 8\sqrt{6})x - 4\sqrt{6}y + 9\sqrt{6} - 18 = 0, \\ \mathcal{A}_2 : f_x + m_2 f_y = 0 \Leftrightarrow (24 + 8\sqrt{6})x + 4\sqrt{6}y - 9\sqrt{6} - 18 = 0. \end{array}$$

■

Problema 6.2.8 *Să se determine diametri conjugaţi ai conicei*

$$\Gamma : 3x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 6y + 10 = 0,$$

care fac între ei un unghi de $45°$.

Rezolvare. Să presupunem că cei doi diametri conjugaţi conicei Γ au pantele m şi m'. Relaţia de conjugare se reduce la $5mm' - 3(m+m') + 3 = 0$, iar faptul că aceştia formează un unghi de $45°$ devine

$$\frac{1}{2} = \frac{(1 + mm')^2}{(1 + m^2)(1 + m'^2)}.$$

Rezolvând sistemul simetric format de cele două ecuaţii rezultă $m_1 = 1$, $m_1' = 0$ şi $m_2 = 3$, $m_2' = 1/2$. Deoarece coordonatele centrului conicei Γ sunt $C(19/6, 5/2)$, obţinem diametri conjugaţi $D_1 : 3x - 3y - 2 = 0$, $D_2 : 2y - 5 = 0$, $D_3 : 3x - y - 7 = 0$ şi $D_4 : 6x - 12y + 11 = 0$. ■

Problema 6.2.9 *a) Să se afle fascicolul de conice circumscrise triunghiului ABO, unde $A(-1, 1)$, $B(-1, -1)$ şi $O(0, 0)$.*

b) Să se determine conicele bitangente la cercul $\Gamma : x^2 + y^2 = 2$ în punctele $P(-1, -1)$ şi $Q(1, -1)$.

Rezolvare. a) Ecuaţiile laturilor triunghiului AOB sunt:

$$AB : x + 1 = 0, \quad AO : x + y = 0, \quad BO : x - y = 0.$$

În concluzie, ecuaţia fascicolului de conice circumscrise triunghiului ABO este

$$\Gamma_{\lambda,\mu} : (x + 1)(x + y) + \lambda(x - y)(x + 1) + \mu(x + y)(x - y) = 0,$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

b) Deoarece putem privi punctele P şi Q ca intersecţia dreptei $PQ : y + 1 = 0$ cu cercul Γ, rezultă că ecuaţia fascicolului de conice bitangente la Γ în P şi Q este

$$\Gamma_\lambda : x^2 + y^2 - 2 + \lambda(y + 1)^2 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

■

Problema 6.2.10 *Să se scrie ecuaţia generală a conicei care trece prin punctele $A(2,0)$, $B(3,0)$, $C(0,1)$, $D(0,4)$ şi $E(12,1)$.*

Rezolvare. Conica Γ care trece prin punctele A, B, C, D şi E este descrisă de ecuaţia

$$\Gamma : \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 4 & 1 \\ 144 & 12 & 1 & 12 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

În urma calculelor, obţinem

$$\Gamma : 2x^2 - 14xy + 3y^2 - 10x - 15y + 12 = 0.$$

Observaţie. Problema se poate rezolva şi scriind fascicolul de conice care trec prin punctele A, B, C, D şi punând condiţia ca punctul E să aparţină fascicolului. ■

Problema 6.2.11 *Aflaţi ecuaţiile diametrilor conjugaţi direcţiei $\overline{v} = \overline{i} - 3\overline{j}$ şi axei Ox, relativ la conica*

$$\Gamma : x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y - 16 = 0.$$

Rezolvare. Ecuaţia diametrului conjugat direcţiei $\overline{v} = \overline{i} - 3\overline{j}$ este $f_x - 3f_y = 0$, unde $f_x = 2x + 2y - 2$ şi $f_y = 2x + 2y + 4$. În concluzie, ecuaţia diametrului conjugat direcţiei $\overline{v}$ este $2x + 2y + 7 = 0$.

Deoarece axa Ox este direcţionată de vectorul $\overline{v} = \overline{i}$, rezultă că ecuaţia diametrului conjugat axei Ox este $x + y - 1 = 0$. ■

Problema 6.2.12 *Să se afle polul axei Oy şi polara punctului $A(1,-2)$ faţă de conica*

$$\Gamma : x^2 - 2y^2 - 3x - 7y + 1 = 0.$$

Rezolvare. Fie $P(\alpha,\beta)$ polul axei $Oy : x = 0$. Ecuaţia polarei de pol P este

$$(x-\alpha)f_x(\alpha,\beta) + (y-\beta)f_y(\alpha,\beta) + 2f(\alpha,\beta) = 0.$$

Deoarece $f_x(x,y) = 2x - 3$ şi $f_y(x,y) = -4y - 7$, în urma calculelor, rezultă că ecuaţia polarei de pol P este

$$(2\alpha - 3)x - (4\beta + 7)y - 3\alpha - 7\beta + 2 = 0.$$

Condiţia ca această ecuaţie să coincidă cu ecuaţia axei Oy este proporţionalitatea coeficienţilor

$$\frac{2\alpha-3}{1}=\frac{4\beta+7}{0}=\frac{3\alpha+7\beta-2}{0}\Leftrightarrow\begin{cases}4\beta+7=0\\3\alpha+7\beta=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=57/12\\\beta=-7/4.\end{cases}$$

Polara punctului $A(1,-2)$ faţă de conica Γ are ecuaţia $-x+y+13=0$.

■

Problema 6.2.13 *Să se determine ecuaţiile tangentelor şi normalelor la conica*

$$\Gamma : 4xy+3y^2+16x+12y-36=0,$$

în punctele ei de intersecţie cu axele de coordonate.

Rezolvare. Punctele de intersecţie ale conicei Γ cu axa Ox se obţin când $y=0$, adică rezolvând ecuaţia $16x-36=0$. Rezultă că există un singur punct de intersecţie cu axa Ox, şi anume $P(9/4,0)$. Pentru a afla punctele de intersecţie ale conicei Γ cu axa Oy, facem $x=0$ şi obţinem ecuaţia $y^2+4y-12=0$, ale cărei soluţii sunt $y_1=2$ şi $y_2=-6$. Cu alte cuvinte, avem punctele de intersecţie $Q(0,2)$ şi $R(0,-6)$. Deoarece $f_x(x,y)=4y+16$ şi $f_y(x,y)=4x+6y+12$, rezultă că avem ecuaţiile tangentelor

$$T_P\Gamma : 16x+21y-36=0, \qquad T_Q\Gamma : x+y-2=0, \qquad T_R\Gamma : x+3y+18=0.$$

Ecuaţiile dreptelor normale sunt:

$$N_P\Gamma : 84x-64y-189=0, \qquad N_Q\Gamma : x-y+2=0, \qquad N_R\Gamma : 3x-y-6=0.$$

■

Problema 6.2.14 *Să se determine tangentele la conica*

$$\Gamma : 2x^2-4xy+y^2+4x-2y-7=0,$$

paralele cu prima bisectoare.

Rezolvare. Deoarece ecuaţia primei bisectoare este $x=y$, rezultă că ecuaţia fascicolului de drepte paralele cu prima bisectoare este $x-y=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Punând condiţia ca o dreaptă a acestui fascicol să aibă un singur punct comun cu conica Γ, rezultă că sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}x-y=\lambda\\2x^2-4xy+y^2+4x-2y-7=0\end{cases}$$

trebuie să aibă o singură soluţie. Scoţând x din prima ecuaţie şi introducând în a doua ecuaţie, obţinem ecuaţia de gradul al doilea

$$y^2 - 2y - (2\lambda^2 + 4\lambda - 7) = 0,$$

al cărei discriminant trebuie să se anuleze. Se obţine $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_2 = -3$. ■

6.3 Probleme propuse

Problema 6.3.1 *Fie punctele* $A(2,3)$, $B(-2,-1)$, $C(4,1)$. *Să se scrie ecuaţiile cercurilor înscris şi circumscris triunghiului* ABC. *Să se determine tangentele la cercul circumscris triunghiului* ABC, *care sunt paralele cu latura* BC.

R. Triunghiul $\triangle ABC$ este dreptunghic în A şi are aria $S = 8$. Prin urmare, raza cercului înscris este $r = 3\sqrt{2} - \sqrt{10}$. Punând condiţia ca centrul cercului înscris I să se afle la distanţa r de fiecare latură, găsim coordonatele $I(2, -3+2\sqrt{5})$. Centrul cercului circumscris O se află la mijlocul ipotenuzei BC, adică are coordonatele $O(1,0)$. Raza cercului circumscris este $R = \sqrt{10}$. Tangentele căutate au ecuaţiile $x - 3y + 9 = 0$ şi $x - 3y - 11 = 0$.

Problema 6.3.2 *Într-un cerc de diametru fix* AB *se dă un punct mobil* M *pe cerc. Tangentele în* M *şi în* B *la cerc se intersectează în punctul* N. *Dreapta* AN *intersectează a doua oară cercul în* P. *Se cere locul geometric descris de punctul de intersecţie al tangentei în* P *la cerc cu dreapta* MN.

R. Dacă cercul dat are ecuaţia $x^2 + y^2 = R^2$, atunci locul geometric căutat este porţiunea din elipsa $9x^2 + 8y^2 = 9R^2$, unde $x, y \in [-R, R]$.

Problema 6.3.3 *Fie elipsa* $E : x^2+2y^2 = 4$ *şi cercul* $\mathcal{C}$ *care are ca diametru axa mare a elipsei. O semidreaptă verticală variabilă* $x = \lambda$, $\lambda \in (-2,2)$, $y > 0$, *intersectează elipsa* E *în* P *şi cercul* $\mathcal{C}$ *în* Q. *Să se determine locul geometric al punctului de intersecţie dintre* OQ *şi* FP, *unde* O *este originea axelor iar* F *este focarul de abscisă pozitivă al elipsei* E.

R. Locul geometric căutat este semielipsa

$$2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{2}+1)y^2 = 3 + 2\sqrt{2}, \ y > 0.$$

Problema 6.3.4 *Să se determine pe hiperbola* $H : 4x^2 - 9y^2 = 36$ *punctul situat la cea mai mică distanţă de dreapta* $d : 2x - y + 2 = 0$.

R. Se consideră un punct arbitrar $P(3\cosh t, 2\sinh t)$ pe ramura din dreapta a hiperbolei H. Minimul distanţei de la punctul P la dreapta d se gaseşte minimizând funcţia $f(t) = 2\left(e^t + 2e^{-t} + 1\right)/\sqrt{5}$. Se obţine $t = \ln\sqrt{2}$, adică avem coordonatele $P\left(9/(2\sqrt{2}), 1/\sqrt{2}\right)$. Analog se tratează ramura din stâga a hiperbolei şi găsim punctul $Q\left(-9/(2\sqrt{2}), -1/\sqrt{2}\right)$. Punctul căutat (care dă minimul distanţei) este punctul Q.

Problema 6.3.5 *Să se discute natura şi genul conicelor:*

a) $\Gamma_1 : 2xy - 2x - 2y + 3 = 0;$

b) $\Gamma_2 : 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 4y + 10 = 0;$

c) $\Gamma_3 : 5x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x - 2y + 2 = 0.$

R. a) Hiperbolă. b) Parabolă. c) Elipsă.

Problema 6.3.6 *Să se discute natura şi genul conicelor fascicolului*

$$\Gamma_\lambda : x^2 + 4xy + y^2 + 2\lambda x + 4y + \lambda = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

şi să se traseze graficul conicelor degenerate ale fascicolului.

R. Pentru $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{1, 4\}$ conica nedegenerată Γ_λ este o hiperbolă. Pentru $\lambda = 1$ conica degenerată Γ este reuniunea de drepte concurente

$$\Gamma_{\lambda=1} : \left[x + (2 - \sqrt{3})y + 1\right] \cdot \left[x + (2 + \sqrt{3})y + 1\right] = 0$$

iar pentru $\lambda = 4$ conica degenerată Γ este reuniunea de drepte concurente

$$\Gamma_{\lambda=4} : \left[x + (2 - \sqrt{3})y + 4 - 2\sqrt{3}\right] \cdot \left[x + (2 + \sqrt{3})y + 4 + 2\sqrt{3}\right] = 0.$$

Problema 6.3.7 *Fie familia de conice*

$$\Gamma_\lambda : 3x^2 + 2\lambda xy - y^2 - 2x - 4y + 4 = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Să se afle locul geometric al centrelor conicelor acestui fascicol şi să se reprezinte grafic acest loc geometric.

R. Locul geometric al centrelor este elipsa

$$\Gamma : 3x^2 + y^2 - x + 2y = 0 \Leftrightarrow \Gamma : 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{13}{12}.$$

Problema 6.3.8 *Să se determine centrul, axele de simetrie şi asimptotele conicei*

$$\Gamma : 4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0.$$

R. Conica Γ este o hiperbolă cu centrul $C(3, -4)$. Ecuaţiile asimptotelor sunt $y+4 = 0$ şi $4x+3y = 0$. Ecuaţiile axelor de simetrie sunt $x+2y+5 = 0$ şi $-2x + y + 10 = 0$.

Problema 6.3.9 *Să se scrie ecuaţia parabolei care trece prin punctele* $O(0, 0)$, $A(0, 1)$ *şi care are ca axă dreapta* $d : x + y + 1 = 0$.

R. Se scrie fascicolul de conice care trece prin punctele O, A şi simetricele acestora faţă de dreapta d. Punând condiţia ca conica să aibă ca axă de simetrie dreapta d, găsim parabola

$$\Gamma : x^2 + 2xy + y^2 + 5x - y = 0.$$

Problema 6.3.10 *Să se determine axele de simetrie, asimptotele şi diametrul conjugat direcţiei dreptei de ecuaţie* $x - y + 3 = 0$, *pentru conica*

$$\Gamma : 4xy - 3y^2 + 4x - 14y - 7 = 0.$$

R. Axele de simetrie au ecuaţiile $2x + y - 3 = 0$ şi $x - 2y - 4 = 0$. Asimptotele au ecuaţiile $y + 1 = 0$ şi $4x - 3y - 11 = 0$. Ecuaţia diametrului conjugat direcţiei dreptei date este $2x - y - 5 = 0$.

Problema 6.3.11 *Să se determine unghiul dintre doi diametri conjugaţi ai elipsei* $E : x^2 + 3y^2 = 6$, *ştiind că unul dintre ei formează un unghi de* $60°$ *cu axa* Ox.

R. $\cos\theta = \sqrt{21}/14$.

Problema 6.3.12 *Să se determine ecuaţia diametrului comun al conicelor* Γ_1 *şi* Γ_2, *unde*

$$\Gamma_1 : x^2 - xy - y^2 - x - y = 0,$$
$$\Gamma_2 : x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0.$$

R. Conica Γ_1 este o hiperbolă cu centrul în $C(1/5, -3/5)$. Conica Γ_2 este o parabolă şi, deci, diametrul conjugat oricărei direcţii are ecuaţia de forma $2x + 2y + \lambda = 0$. Punând condiţia ca diametrul să conţină punctul C, găsim $\lambda = 4/5$. În concluzie, diametrul comun al celor două conice are ecuaţia $5x + 5y + 2 = 0$.

Problema 6.3.13 *Să se reducă la forma canonică şi să se precizeze natura şi genul următoarelor conice, punându-se în evidenţă roto-translaţiile plane efectuate:*

a) $\Gamma_1 : 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$;

b) $\Gamma_2 : 7x^2 - 8xy + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$;

c) $\Gamma_3 : 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0$;

d) $\Gamma_4 : 2xy - 2y + 1 = 0$;

e) $\Gamma_5 : 3x^2 - 4xy + 2x + 2y - 1 = 0$;

f) $\Gamma_6 : x^2 - 4xy + y^2 + 6x - 12y + 8 = 0$;

g) $\Gamma_7 : 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$;

h) $\Gamma_8 : x^2 - 2xy + y^2 + x - y + 2 = 0$;

i) $\Gamma_9 : 8x^2 + 6xy + 6x + 3y + 1 = 0$.

R. $\Gamma_1 : 2X^2 + Y^2 - 4 = 0$ – elipsă; $\mathcal{O}(-1, -1)$ – centrul; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

b) $\Gamma_2 : 9Y^2 - X^2 + 4 = 0$ – hiperbolă; $\mathcal{O}(-1, -2)$ – centrul; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

c) $\Gamma_3 : 5Y^2 + \sqrt{10}X = 0$ – parabolă; $\mathcal{O}(-9/20, 33/20)$ – vârful; $3x - y + 3 = 0$ – axa de simetrie; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

d) $\Gamma_4 : X^2 - Y^2 + 1 = 0$ – hiperbolă; $\mathcal{O}(1, 0)$ – centrul; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

e) $\Gamma_5 : -X^2 + 4Y^2 + 3/4 = 0$ – hiperbolă; $\mathcal{O}(1/2, 5/4)$ – centrul; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

f) $\Gamma_6 : -X^2 + 3Y^2 - 1 = 0$ – hiperbolă; $\mathcal{O}(-3, 0)$ – centrul; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

g) $\Gamma_7 : Y^2 = 0$ – drepte confundate; $2x + y - 1 = 0$ – axa de simetrie (se identifică cu conica); $\mathcal{O}(2/5, 1/5)$ – originea sistemului de axe roto-translatat; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

h) $\Gamma_8 : Y^2 + 7/8 = 0$ – mulţimea vidă; $\mathcal{O}(-1/4, 1/4)$ – originea sistemului de axe roto-translatat; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

i) $\Gamma_9 : 9Y^2 - X^2 = 0$ – reuniune de drepte concurente; $\mathcal{O}(-1/2, 1/3)$ – centrul (coincide cu punctul de intersecţie al dreptelor concurente); $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3, 1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(1, -3)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

Problema 6.3.14 *Să se determine ecuaţia conicei care trece prin punctele de intersecţie ale conicelor*

$$\Gamma_1 : x^2 - xy - 2y^2 + x + y = 0,$$
$$\Gamma_2 : x^2 - xy - 2y^2 - 2x + 4y = 0$$

şi prin punctule $A(1, 2)$.

R. $-x^2 + xy + 2y^2 + 5x - 7y = 0$.

Problema 6.3.15 *Să se reprezinte grafic locul geometric al centrelor conicelor din fascicolul circumscris patrulaterului determinat de punctele* $A(0, -1)$, $B(0, 1)$, $C(-2, 0)$ *şi* $D(2, 0)$. *Să se arate că polarele punctului* $P(1, 0)$, *în raport cu conicele fascicolului, trec printr-un punct fix.*

R. Locul geometric al centrelor conicelor este dreapta $x+2y = 0$. Punctul fix căutat este $P(4, 0)$.

Problema 6.3.16 *Există conice nedegenerate circumscrise hexagonului* $ABCDEF$, *unde*

$$A(1, 0),\ B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$D(-1, 0),\ E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ F\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ ?$$

În caz afirmativ, să se scrie ecuaţiile acestor conice.

R. Există o singură conică, şi anume, cercul $x^2 + y^2 = 1$.

Problema 6.3.17 *Să se găsească polara punctului $P(1,1)$ în raport cu conica*

$$\Gamma : x^2 + 2xy - y^2 + 3x - 5y - 1 = 0$$

şi polul dreptei $d : x - y - 1 = 0$ în raport cu aceeaşi conică.

R. Polara de pol $P(1,1)$ este $7x - 5y - 4 = 0$ iar polul dreptei d este punctul $A(1/2, 7/6)$.

Problema 6.3.18 *Să se determine locul geometric al polurilor dreptelor*

$$d_\lambda : (2\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y + 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

faţă de conica

$$\Gamma : xy + x + y - 1 = 0.$$

R. Locul geometric al polurilor dreptelor d_λ este dreapta $x + 4y - 7 = 0$.

Problema 6.3.19 *Se consideră familia de conice*

$$\Gamma_\lambda : x^2 + 2\lambda xy - 2\lambda x - 4y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că dacă λ este variabil, polarele unui punct fix din plan $M(x_0, y_0)$, unde $x_0^2 + 2y_0 - 2 \neq 0$, în raport cu aceste conice, trec printr-un punct fix.

R. Punctul fix căutat are coordonatele

$$P\left(\frac{2x_0(y_0+1)}{x_0^2 + 2y_0 - 2}, \frac{x_0^2 - 2y_0^2 + 2y_0}{x_0^2 + 2y_0 - 2}\right).$$

Problema 6.3.20 *Să se scrie ecuaţiile tangentelor la conica*

$$\Gamma : x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0,$$

în punctele ei de intersecţie cu axele de coordonate.

R. Punctele de intersecţie cu axele sunt $P(0,3)$, $Q(0,-1)$, $R(3,0)$ şi $S(2,0)$. Tangentele corespunzătoare sunt $T_P\Gamma : 5x + 8y - 24 = 0$, $T_Q\Gamma : 5x - 8y - 8 = 0$, $T_R\Gamma : x + 4y - 3 = 0$ şi $T_S\Gamma : x - 4y - 2 = 0$.

Problema 6.3.21 *Să se scrie ecuaţiile tangentelor la conica*

$$\Gamma : 2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0,$$

care trec prin punctul $P(3,4)$.

R. Avem două tangente: $x - 3 = 0$ şi $7x - 2y - 13 = 0$.

Problema 6.3.22 *Să se scrie ecuaţiile tangentelor la conica*

$$\Gamma : x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0,$$

paralele cu dreapta $d : 3x + 3y - 5 = 0$.

R. Tangentele căutate au ecuaţiile $x + y - 1 = 0$ şi $3x + 3y - 13 = 0$.

Problema 6.3.23 *Determinaţi valorile parametrului real* m *care fac ca dreapta* $d : y = mx$ *să fie tangentă la conica*

$$\Gamma : (x + y)^2 + 2 = \sqrt{2}(y - x).$$

R. $m_1 = -1/3$ şi $m_2 = -3$.

Problema 6.3.24 *Să se determine conica ce trece prin punctele* $A(0, 0)$, $B(1, 2)$, $C(2, 1)$ *şi* $D(3, -1)$ *şi pentru care dreapta* $d : x - 2y = 0$ *este tangentă în punctul* A.

R. Scriem fascicolul de conice care trec prin punctele A, B, C şi D şi punem condiţia ca dreapta d să fie tangentă în punctul A. Găsim conica $3x^2 - 4xy - 4y^2 - 7x + 14y = 0$.

Problema 6.3.25 *Să se scrie ecuaţia familiei de conice tangente axelor de coordonate în punctele* $A(1, 0)$ *şi* $B(0, 2)$*, punând în evidenţă parabolele sale. Să se reprezinte grafic conica din familie cu centrul în punctul* $C(1, 2)$.

R. Familia de conice căutată este $\Gamma_\lambda : xy + \lambda(2x + y - 2)^2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Din condiţia $\delta = 0$, găsim parabola corespunzătoare valorii $\lambda = -1/8$, adică parabola $4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$. Conica cu centrul C este elipsa $4(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 4$, corespunzătoare valorii $\lambda = -1/4$.

Problema 6.3.26 *Să se scrie ecuaţia fascicolului de conice bitangente hiperbolei* $H : x^2 - 4y^2 - 4 = 0$ *în punctele ei de intersecţie cu dreapta* $\Delta : y = 1$*. Să se reprezinte grafic conicele degenerate ale fascicolului.*

R. Fascicolul de conice căutat este $\Gamma_\lambda : x^2 - 4y^2 - 4 + \lambda(y - 1)^2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Există o singură conică degenerată ($\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$), reprezentată de reuniunea de drepte concurente $x^2 - 2(y + 1)^2 = 0$.

Problema 6.3.27 *Să se scrie fascicolul de conice circumscris triunghiului determinat de punctele $A(3,2)$, $B(-2,-1)$ şi $C(4,1)$. Să se determine conicele degenerate ale acestui fascicol.*

Ind. Fascicolul de conice circumscris triunghiului $\triangle ABC$ este

$$\Gamma_{\lambda,\mu} : (3x-5y+1)(x+y-5)+\lambda(3x-5y+1)(x-3y-1)+$$
$$+\mu(x+y-5)(x-3y-1)=0,$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Problema 6.3.28 *Se dă parabola*

$$\Gamma : x^2+2xy+y^2+3x-3y-18=0.$$

Să se scrie ecuaţia fascicolului de conice bitangente parabolei în punctele de intersecţie cu prima bisectoare a axelor de coordonate. Să se discute natura conicelor acestui fascicol.

R. Fascicolul de conice căutat este

$$\Gamma_\lambda : x^2+2xy+y^2+3x-3y-18+\lambda(x-y)^2=0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pentru $\lambda=-1/8$, conica Γ_λ este o reuniune de drepte concurente; Pentru $\lambda \in (-\infty,-1/8) \cup (-1/8,0)$, conica Γ_λ este o hiperbolă; Pentru $\lambda=0$, conica Γ_λ este o parabolă; Pentru $\lambda \in (0,\infty)$, conica Γ_λ este o elipsă.

Problema 6.3.29 *Să se arate că locul geometric al centrelor conicelor fascicolului de conice bitangente unei conice date în două puncte date este o dreaptă.*

Capitolul 7

Cuadrice

7.1 Elemente teoretice fundamentale

Să considerăm spaţiul punctual euclidian al vectorilor liberi din spaţiu $\mathcal{E}_3 = (E_3, V_3, \varphi)$ şi $\mathcal{R} = \{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ un reper ortonormat în acest spaţiu. Se numeşte *suprafaţă regulată definită implicit* în $\mathcal{E}_3$ o mulţime de puncte din spaţiu $P(x, y, z)$ ale căror coordonate verifică o relaţie de forma

$$\Sigma : f(x, y, z) = 0,$$

unde funcţia f este diferenţiabilă şi are proprietatea

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (P) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (P) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 (P) \neq 0, \quad \forall\ P \in \Sigma.$$

Definiţia 7.1.1 *În particular, se numeşte* ***cuadrică*** *sau* ***suprafaţă algebrică de grad doi****, o suprafaţă* $\Sigma : f(x, y, z) = 0$ *definită de o funcţie polinomială de gradul al doilea*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &\quad +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}, \end{aligned}$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *şi* $\sum_{1\leq i\leq j\leq 3} a_{ij}^2 \neq 0$.

Forma pătratică $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$, se numeşte *forma pătratică asociată cuadricei* Σ.

Definiţia 7.1.2 *Se numesc* ***invarianţii ortogonali*** *(nu se modifică la roto-translaţii spaţiale) ai cuadricei* $\Sigma : f(x, y, z) = 0$ *numerele reale*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \ J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Matricea care determină invariantul Δ se numeşte *matricea cuadricei* Σ.

Definiţia 7.1.3 *Locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate, la distanţa* $R > 0$, *de un punct fix* $C(x_0, y_0, z_0)$, *numit* ***centru****, se numeşte* ***sferă*** *şi este descris de ecuaţia cuadricei*

$$S(C, R) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Evident, o cuadrică $\Sigma : f(x, y, z) = 0$, unde

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d,$$

este o sferă dacă şi numai dacă $4d < a^2 + b^2 + c^2$. În aceste condiţii, sfera Σ este centrată în $C(a/2, b/2, c/2)$ şi are raza $R > 0$, unde

$$2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}.$$

Definiţia 7.1.4 *Locul geometric al punctelor din spaţiu care au aceeaşi putere faţă de două sfere* $S_1(C_1, R_1)$ *şi* $S_2(C_2, R_2)$ *se numeşte* ***planul radical*** *al sferelor* S_1 *şi* S_2.

Propoziţia 7.1.1 *Planul radical a două sfere* $S_1(C_1, R_1) : f_1(x, y, z) = 0$ *şi* $S_2(C_2, R_2) : f_2(x, y, z) = 0$ *este un plan perpendicular pe axa* O_1O_2 *a centrelor celor două sfere şi are ecuaţia*

$$\mathcal{PR} : f_1(x, y, z) - f_2(x, y, z) = 0.$$

Definiţia 7.1.5 *Locul geometric al punctelor din spaţiu care au aceeaşi putere faţă de trei sfere* $S_1(C_1, R_1)$, $S_2(C_2, R_2)$ *şi* $S_3(C_3, R_3)$ *se numeşte* ***axa radicală*** *a sferelor* S_1 S_2 *şi* S_3.

Propoziţia 7.1.2 *Axa radicală a trei sfere* $S_1(C_1, R_1) : f_1(x, y, z) = 0$, $S_2(C_2, R_2) : f_2(x, y, z) = 0$ *şi* $S_3(C_3, R_3) : f_3(x, y, z) = 0$ *este o dreaptă perpendiculară pe planul* $O_1O_2O_3$ *al centrelor sferelor şi are ecuaţia*

$$\mathcal{AR} : \begin{cases} f_1(x, y, z) - f_2(x, y, z) = 0 \\ f_1(x, y, z) - f_3(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Teorema 7.1.3 *Prin patru puncte distincte necoplanare* $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ *şi* $D(x_4, y_4, z_4)$ *trece o singură sferă, descrisă de ecuaţia*

$$S : \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Definiţia 7.1.6 *Cuadrica* E, *de ecuaţie*

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

unde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, *se numeşte* ***elipsoid***.

Definiţia 7.1.7 *Cuadrica* H_1, *de ecuaţie*

$$H_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

unde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, *se numeşte* ***hiperboloid cu o pânză***.

Definiţia 7.1.8 *Cuadrica* H_2, *de ecuaţie*

$$H_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

unde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, *se numeşte* ***hiperboloid cu două pânze***.

Definiţia 7.1.9 *Cuadrica* P_e, *de ecuaţie*

$$P_e : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz,$$

unde $a > 0$, $b > 0$, $p \in \mathbb{R}$, *se numeşte* ***paraboloid eliptic***.

Definiţia 7.1.10 *Cuadrica P_h, de ecuaţie*

$$P_h : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz,$$

*unde $a > 0$, $b > 0$, $p \in \mathbb{R}$, se numeşte **paraboloid hiperbolic**.*

Definiţia 7.1.11 *Cuadrica C, de ecuaţie*

$$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

*unde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, se numeşte **con**.*

Definiţia 7.1.12 *Cuadrica* Ci, *de ecuaţie de forma*

$$\mathrm{Ci} : f(x, y) = 0, \ \ z \in \mathbb{R},$$

*unde $f(x, y)$ este o funcţie de grad doi în x şi y, se numeşte **cilindru**.*

Observaţia 7.1.4 *Alte cuadrice sunt: **două plane secante***

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

două plane paralele** ($x^2 - a^2 = 0$), o **dreaptă dublă

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

un punct dublu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

*sau **mulţimea vidă***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

Propoziţia 7.1.5 *O cuadrică $\Sigma : f(x, y, z) = 0$ are un centru de simetrie $C(x_0, y_0, z_0)$ dacă şi numai dacă $\delta \neq 0$. Coordonatele x_0, y_0 şi z_0 ale centrului de simetrie C (dacă acesta există) sunt soluţiile sistemului liniar*

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = 0 \\ f_y(x, y, z) = 0 \\ f_z(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0, \end{cases}$$

unde $f_x(x, y, z) = \partial f / \partial x$, $f_y(x, y, z) = \partial f / \partial y$ şi $f_z(x, y, z) = \partial f / \partial z$.

Teorema 7.1.6 (reducerea la forma canonică a cuadricelor) *Fie cuadrica* $\Sigma : f(x, y, z) = 0$, *fie* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ *rădăcinile* ***ecuaţiei caracteristice*** *(valorile proprii ale matricii formei pătratice asociate cuadricei)*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - I\lambda^2 + J\lambda - \delta = 0$$

şi fie $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ *rădăcinile ecuaţiei*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\Lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22}-\Lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\Lambda & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44}-\Lambda \end{vmatrix} = 0.$$

În acest context, avem:

- *dacă* $\delta \neq 0$, *atunci există un sistem de coordonate* $\mathcal{O}XYZ$, *obţinut printr-o roto-translaţie a sistemului de coordonate* $Oxyz$, *în raport cu care ecuaţia cuadricei* Σ *are forma canonică*

$$\Sigma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

- *dacă* $\delta = 0$, $J \neq 0$ *şi* $\Delta \neq 0$, *atunci forma canonică a cuadricei* Σ este

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \pm 2\sqrt{\frac{-\Delta}{J}} Z = 0.$$

- *dacă* $\delta = 0$, $J \neq 0$ *şi* $\Delta = 0$, *atunci forma canonică a cuadricei* Σ este

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K}{J} = 0.$$

  unde $K = \Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 + \Lambda_1\Lambda_2\Lambda_4 + \Lambda_1\Lambda_3\Lambda_4 + \Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4$.

- *dacă* $\delta = 0$, $J = 0$, $\Delta = 0$ *şi* $K \neq 0$, *atunci forma canonică a cuadricei* Σ este

$$X^2 \pm 2\sqrt{\frac{-K}{I^3}} Y = 0.$$

- *dacă* $\delta = 0$, $J = 0$, $\Delta = 0$ *şi* $K = 0$, *atunci forma canonică a cuadricei* Σ este
$$X^2 + \frac{L}{I^2} = 0,$$
unde $L = \Lambda_1\Lambda_2 + \Lambda_1\Lambda_3 + \Lambda_1\Lambda_4 + \Lambda_2\Lambda_3 + \Lambda_2\Lambda_4 + \Lambda_3\Lambda_4$.

Corolarul 7.1.7 (clasificarea cuadricelor) *Fie* $\Sigma : f(x, y, z) = 0$ *o cuadrică. În acest context, avem următoarea clasificare a cuadricelor:*

- *dacă cuadrica* Σ *este* ***nedegenerată*** $(\Delta \neq 0)$ *atunci:*
  - *pentru* $\delta \neq 0$ *cuadrica* Σ *este* ***mulţimea vidă*** *ori* ***elipsoid (sferă)*** *ori* ***hiperboloid cu o pânză sau două;***
  - *pentru* $\delta = 0$ *cuadrica* Σ *este un* ***paraboloid eliptic*** *sau* ***hiperbolic.***
- *dacă cuadrica* Σ *este* ***degenerată*** $(\Delta = 0)$ *atunci:*
  - *pentru* $\delta \neq 0$ *cuadrica* Σ *este un* ***punct dublu*** *sau* ***un con;***
  - *pentru* $\delta = 0$, $J \neq 0$ *şi* $K \neq 0$ *cuadrica* Σ *este* ***mulţimea vidă*** *sau* ***un cilindru;***
  - *pentru* $\delta = 0$, $J \neq 0$ *şi* $K = 0$ *cuadrica* Σ *este o* ***dreaptă dublă*** *sau* ***două plane secante;***
  - *pentru* $\delta = 0$, $J = 0$ *şi* $K \neq 0$ *cuadrica* Σ *este un* ***cilindru parabolic;***
  - *pentru* $\delta = 0$, $J = 0$ *şi* $K = 0$ *cuadrica* Σ *este* ***mulţimea vidă*** *ori* ***două plane paralele*** *sau* ***confundate.***

Reducerea cuadricelor la forma canonică
"Metoda roto-translaţiei" pentru cazul
$\Delta^2 + \delta^2 + J^2 \neq 0$ sau $K = 0$

1. Determinăm valorile proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 ale matricii formei pătratice asociate cuadricei
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

rezolvând ecuaţia caracteristică (*ecuaţia seculară*)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

2. Calculăm subspaţiile proprii $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}$ şi V_{λ_3} şi determinăm nişte *vectori proprii ortonormaţi* $\overline{e}_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\overline{e}_2 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ şi $\overline{e}_3 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$. Efectuând eventual o renumerotare a vectorilor proprii ortonormaţi, scriem matricea de rotaţie spaţială

$$R = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \mu_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \mu_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \mu_3 \end{pmatrix},$$

astfel încât $\det R = 1$.

3. Efectuăm rotaţia în spaţiu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \mu_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \mu_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

şi ajungem la o ecuaţie de forma

$$\Sigma : \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0,$$

unde $a'_{ij} \in \mathbb{R}$.

4. Restrângem pătratele (dacă este cazul) şi obţinem

$$\Sigma : \lambda_1 \left(x' + \frac{a'_{14}}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{24}}{\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left(z' + \frac{a'_{34}}{\lambda_3} \right)^2 + a''_{44} = 0,$$

unde

$$a''_{44} = a'_{44} - \frac{a'^2_{14}}{\lambda_1} - \frac{a'^2_{24}}{\lambda_2} - \frac{a'^2_{34}}{\lambda_3}.$$

5. Efectuăm translaţia în spaţiu

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{a'_{14}}{\lambda_1} \\ Y = y' + \dfrac{a'_{24}}{\lambda_2} \\ Z = z' + \dfrac{a'_{34}}{\lambda_3}, \end{cases}$$

şi găsim forma canonică

$$\Sigma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + a''_{44} = 0.$$

6. În ultimul sistem de coordonate $\mathcal{O}XYZ$ recunoaştem cuadrica Σ.

Definiţia 7.1.13 *Fie $\Sigma : f(x, y, z) = 0$ o cuadrică şi $\overline{v} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$ o direcţie în spaţiu. Locul geometric descris de mijloacele coardelor cuadricei Σ, paralele cu direcţia $\overline{v}$, se numeşte* ***plan diametral conjugat*** *direcţiei $\overline{v}$.*

Propoziţia 7.1.8 *Planul diametrul conjugat direcţiei $\overline{v} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$, relativ la cuadrica $\Sigma : f(x, y, z) = 0$, este o porţiune din planul de ecuaţie*

$$PD_{\overline{v}} : lf_x + mf_y + nf_z = 0.$$

Definiţia 7.1.14 *Fie $\Sigma : f(x, y, z) = 0$ o cuadrică şi $P(x_0, y_0, z_0)$ un punct arbitrar din spaţiu. Planul $\mathcal{P}_p\Sigma$ de ecuaţie*

$$\mathcal{P}_p\Sigma : (x - x_0)f_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)f_z(x_0, y_0, z_0)+$$
$$+2f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

se numeşte ***planul polar de pol*** *P* ***al cuadricei*** *Σ.*

Planul polar al unui pol $P(x_0, y_0, z_0)$ care aparţine cuadricei $\Sigma : f(x, y, z) = 0$ este exact *planul tangent în P* la cuadrica Σ. Ecuaţia acestui plan tangent este

$$T_P\Sigma : (x-x_0)f_x(x_0, y_0, z_0)+(y-y_0)f_y(x_0, y_0, z_0)+(z-z_0)f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

iar *ecuaţia dreptei normale în P* la cuadrica Σ este

$$N_P\Sigma : \frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{f_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Definiţia 7.1.15 *O cuadrică $\Sigma : f(x, y, z) = 0$ cu proprietatea că prin orice punct al ei trece o dreaptă inclusă în suprafaţa cuadricei se numeşte* ***cuadrică riglată****. Dacă prin fiecare punct al cuadricei trec două drepte distincte incluse în suprafaţa cuadricei spunem că cuadrica este* ***dublu riglată****.*

Teorema 7.1.9 *Hiperboloidul cu o pânză descris de ecuaţia*

$$H_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

este o cuadrică dublu riglată cu dreptele generatoare

$$d_\lambda : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \lambda\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \qquad d_\mu : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \mu\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\mu}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \end{cases}$$

$$d_\infty : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ 1 - \dfrac{y}{b} = 0, \end{cases} \qquad \overline{d}_\infty : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ 1 + \dfrac{y}{b} = 0, \end{cases}$$

$$d_{-\infty} : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \\ 1 - \dfrac{y}{b} = 0, \end{cases} \qquad \overline{d}_{-\infty} : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \\ 1 + \dfrac{y}{b} = 0, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$.

Teorema 7.1.10 *Paraboloidul hiperbolic descris de ecuaţia*

$$P_h : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$$

este o cuadrică dublu riglată cu generatoarele

$$d_\lambda : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 2p\lambda z \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{\lambda}, \end{cases} \qquad d_\mu : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2p\mu z \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{\mu}, \end{cases}$$

$$d_\infty : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0 \\ z = 0, \end{cases} \qquad d_{-\infty} : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$.

7.2 Probleme rezolvate

Problema 7.2.1 *Să se determine ecuaţia suprafeţei generate de elipsa mobilă*

$$E_{\lambda\mu} : \begin{cases} \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{16} = \lambda \\ x = \mu, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, care se deplasează paralel cu ea însăşi şi se deformează sprijinindu-se pe hiperbola fixă

$$H : \begin{cases} -\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{x^2}{9} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Rezolvare. Faptul că elipsa $E_{\lambda\mu}$ se sprijină pe hiperbola H se reduce la compatibilitatea sistemului de ecuaţii (elipsa $E_{\lambda\mu}$ şi hiperbola H au două puncte comune)

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{16} = \lambda \\ -\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{x^2}{9} = 1 \\ x = \mu \\ z = 0. \end{cases}$$

Este evident că sistemul este compatibil dacă şi numai dacă λ şi μ satisfac relaţia $\mu^2 = 9(\lambda + 1)$. Folosind acum ecuaţiile elipsei $E_{\lambda\mu}$, prin înlocuirea parametrilor λ şi μ, găsim ecuaţia suprafeţei căutate:

$$\Sigma : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1.$$

Aceasta este ecuaţia unui hiperboloid cu două pânze. ∎

Problema 7.2.2 *Să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu al căror raport al distanţelor la punctele $A(2, -2, 3)$ şi $B(-2, 2, -3)$ este constant.*

Rezolvare. Fie $P(x, y, z)$ un punct mobil în spaţiu care verifică proprietatea din enunţ. Înseamnă că avem

$$\frac{(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2}{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2} = \lambda > 0.$$

Rezultă că locul geometric căutat este determinat de cuadrica

$$\begin{aligned} \Sigma : &(1-\lambda)x^2 + (1-\lambda)y^2 + (1-\lambda)z^2 - \\ &-4(1+\lambda)x + 4(1+\lambda)y - 6(1+\lambda)z + 17(1-\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Avem următoarele situaţii:

a) dacă $\lambda = 1$, atunci cuadrica Σ se reduce la planul ce trece prin origine

$$P : 2x - 2y + 3z = 0.$$

b) dacă $\lambda \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, atunci cuadrica Σ este sfera

$$S : \left(x - 2\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 + \left(y + 2\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 + \left(z - 3\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 = \frac{68\lambda}{(1-\lambda)^2}$$

cu centrul în $C(2\mu, -2\mu, 3\mu)$ şi de rază $R > 0$, unde

$$\mu = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}, \quad R = \frac{\sqrt{68\lambda}}{|1-\lambda|}.$$

■

Problema 7.2.3 *Să se determine coordonatele centrului de simetrie (în cazul în care acesta există) şi să se specifice tipul cuadricelor:*

a) $\Sigma_1 : 5x^2 - 8y^2 + 5z^2 - 6xz + 8 = 0;$

b) $\Sigma_2 : x^2 - y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 5x - 1 = 0;$

c) $\Sigma_3 : 2x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xy + 2xz + 2z - 1 = 0;$

d) $\Sigma_4 : 3x^2 + y^2 + 4xy - 6xz - 2yz - 2y + 6z - 3 = 0.$

Rezolvare. a) Cuadrica Σ_1 este nedegenerată şi are centru de simetrie deoarece $\Delta = 8\delta \neq 0$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -1024, \quad \delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & -8 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -128.$$

Valorile proprii ale matricii care determină pe $\delta \neq 0$ sunt rădăcinile ecuaţiei seculare. Acestea sunt $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$ şi $\lambda_3 = -8$. În concluzie, cuadrica Σ_1 este un hiperboloid cu două pânze de ecuaţie canonică

$$\Sigma_1 : \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{1} - \frac{Z^2}{1} + 1 = 0.$$

Coordonatele centrului de simetrie al cuadricei Σ_1 sunt $C_1(0, 0, 0)$ şi se deduc prin rezolvarea sistemului liniar

$$\begin{cases} 5x - 3z = 0 \\ y = 0 \\ -3x + 5z = 0. \end{cases}$$

b) Deoarece $\Delta \neq 0$ şi $\delta \neq 0$, cuadrica Σ_2 este nedegenerată şi are centru de simetrie. Invarianţii ortogonali Δ şi δ au valorile

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -5/2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 33/2, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Coordonatele centrului de simetrie sunt soluţia sistemului liniar

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2z = 5 \\ x + y + z = 0 \\ -x - y + z = 0, \end{cases}$$

adică $C_2(5/4, -5/4, 0)$. Valorile proprii ale matricii care determină invariantul $\delta \neq 0$ sunt rădăcinile ecuaţiei seculare, şi anume $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ şi $\lambda_3 = -2$. În concluzie, cuadrica Σ_1 este un hiperboloid cu o pânză de ecuaţie

$$\Sigma_2 : \frac{X^2}{\dfrac{33}{16}} + \frac{Y^2}{\dfrac{33}{8}} - \frac{Z^2}{\dfrac{33}{16}} - 1 = 0.$$

c) Invarianţii ortogonali Δ şi δ ai cuadricei Σ_3 sunt

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -7, \quad \delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Cuadrica este nedegenerată şi are centrul $C_3(5, 2, -6)$ dat de soluţia sistemului

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ -2x + 5y = 0 \\ x + z = -1. \end{cases}$$

Valorile proprii ale matricii care determină pe δ sunt soluţiile ecuaţiei seculare $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 12\lambda - 1 = 0$. Deoarece

$$\lim_{\lambda \to -\infty} f(\lambda) = -\infty \quad f(0) = 1 \quad f(2) = -1 \quad \lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = \infty,$$

rezultă că ecuaţia are trei rădăcini reale $\lambda_1 \in (-\infty, 0), \lambda_2 \in (0, 2)$ şi $\lambda_3 \in (2, \infty)$. În concluzie, cuadrica Σ_3 este hiperboloidul cu o pânză

$$\Sigma_3 : \frac{X^2}{\dfrac{7}{\lambda_1}} + \frac{Y^2}{\dfrac{7}{\lambda_2}} + \frac{Z^2}{\dfrac{7}{\lambda_3}} - 1 = 0.$$

d) Cuadrica Σ_4 este degenerată şi fără centru de simetrie deoarece invarianţii ortogonali ai cuadricei Σ_4 sunt

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad \delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad J = -11 \neq 0.$$

Valorile proprii ale matricii care determină pe δ sunt $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{15}$ şi $\lambda_3 = 0$. În urma calculelor, obţinem invarianţii $K = 0$ şi $L = -33$, deoarece

$$\begin{vmatrix} 3-\Lambda & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1-\Lambda & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -\Lambda & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -3-\Lambda \end{vmatrix} = -\Lambda^4 + \Lambda^3 + 33\Lambda^2.$$

Forma canonică a cuadricei Σ_4 este

$$\Sigma_3 : \left(2 + \sqrt{15}\right) X^2 + \left(2 - \sqrt{15}\right) Y^2 = 0.$$

Cu alte cuvinte, Σ_4 este reuniunea a două plane secante. ■

Problema 7.2.4 *Să se determine coordonatele centrului de simetrie al cuadricei*

$$\Sigma : 2x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xy + 2xz + 2y + 2z - 1 = 0$$

şi să se efectueze o translaţie în acest centru.

Rezolvare. Centrul de simetrie al cuadricei Σ se determină cu ajutorul sistemului liniar

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ -2x + 5y = -1 \\ x + z = -1 \end{cases}$$

şi are coordonatele $C(3, 1, -4)$. Făcând translaţia sistemului de axe $Oxyz$ în sistemul de axe $Cx'y'z'$, determinată de transformările $x = x' + 3$, $y = y' + 1$ şi $z = z' - 4$, cuadrica Σ capătă expresia

$$\Sigma : 2x'^2 + 5y'^2 + z'^2 - 4x'y' + 2x'z' - 4 = 0.$$

■

Problema 7.2.5 *Să se reducă la forma canonică şi să se specifice natura şi tipul cuadricelor, precizându-se roto-translaţiile spaţiale făcute:*

a) $\Sigma_1 : 36x^2 + y^2 + 4z^2 + 72x + 6y - 40z + 109 = 0$;

b) $\Sigma_2 : x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$;

c) $\Sigma_3 : 2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0$;

d) $\Sigma_4 : x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$;

e) $\Sigma_5 : 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2x + y - z - 1 = 0$;

f) $\Sigma_6 : 4x^2 + 9y^2 - 12xy + 2x + 10y + 1 = 0$.

Rezolvare. a) Deoarece forma pătratică $q_1(x, y, z) = 36x^2 + y^2 + 4z^2$ a cuadricei Σ_1 este deja în formă canonică, rezultă că este suficientă doar o translaţie a sistemului de axe $Oxyz$ pentru a obţine forma canonică. Formând pătrate în expresia lui Σ_1, obţinem

$$\Sigma_1 : 36[(x + 1)^2 - 1] + (y + 3)^2 - 9 + 4[(z - 5)^2 - 25] + 109 = 0.$$

Efectuând translaţia $X = x + 1$, $Y = y + 3$ şi $Z = z - 5$ în centrul $C(-1, -3, 5)$, găsim că Σ_1 este elipsoidul de ecuaţie

$$\Sigma_1 : X^2 + \frac{Y^2}{36} + \frac{Z^2}{9} = 1.$$

b) Folosind metoda valorilor şi vectorilor proprii, reducem la forma canonică forma pătratică $q_2(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4yz$ a cuadricei Σ_2. Valorile proprii ale matricii acestei forme pătratice sunt soluţiile ecuaţiei seculare

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0,$$

adică $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ şi $\lambda_3 = -1$. Bazele ortonormate ale subspaţiilor proprii asociate sunt

$$B_1 = \{\overline{e}_1 = (1, 0, 0)\}, \quad B_2 = \left\{\overline{e}_2 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\},$$

$$B_3 = \left\{\overline{e}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}.$$

Acestea produc rotaţia spaţială directă sau pozitivă (de determinant egal cu unu)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Efectuând schimbarea de coordonate (rotaţia spaţială directă)

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(y' + 2z') \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2y' + z'), \end{cases}$$

în urma calculelor, expresia cuadricei Σ_2 se reduce la

$$\Sigma_2 : x'^2 - y'^2 + 4z'^2 - 6x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + \frac{16}{\sqrt{5}}z' + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Sigma_2 : (x' - 3)^2 - \left(y' - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(z' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = 0.$$

Efectuând acum translaţia $X = x' - 3$, $Y = y' - 4/\sqrt{5}$ şi $Z = z' + 2/\sqrt{5}$, deducem că cuadrica Σ_2 este hiperboloidul cu o pânză

$$\Sigma_2 : X^2 - Y^2 + \frac{Z^2}{\frac{1}{4}} - 1 = 0.$$

c) Matricea formei pătratice $q_3(x, y, z) = 2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz$ a cuadricei Σ_3 este

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale acestei matrici sunt rădăcinile ecuaţiei seculare, şi anume $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$ şi $\lambda_3 = 6$. Baza ortonormată în care se obţine forma canonică a formei pătratice q_3 este

$$B_1 = \left\{ \overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1) \right\}, \quad B_2 = \left\{ \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \right\},$$

$$B_3 = \left\{ \overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1) \right\}.$$

În concluzie, vom efectua rotaţia spaţială directă

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-x' - \sqrt{2}y' + \sqrt{3}z') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2x' - \sqrt{2}y') \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(x' + \sqrt{2}y' + \sqrt{3}z'). \end{cases}$$

În urma rotaţiei, expresia cuadricei Σ_3 se reduce la

$$\Sigma_3 : 6y'^2 - 4z'^2 - \sqrt{6}x' - 2\sqrt{3}y' + 3\sqrt{2}z' - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Sigma_3 : 6\left(y' - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - 4\left(z' - \frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2 - \sqrt{6}x' - \frac{35}{8} = 0.$$

Efectuând acum translaţia

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{35}{8\sqrt{6}} \\ Y = y' - \dfrac{\sqrt{3}}{6} \\ Z = z' - \dfrac{3\sqrt{2}}{8}, \end{cases}$$

deducem că cuadrica Σ_3 este paraboloidul hiperbolic

$$\Sigma_3 : \frac{Y^2}{\frac{1}{6}} - \frac{Z^2}{\frac{1}{4}} = \sqrt{6}X.$$

d) Forma pătratică asociată cuadricei Σ_4 este

$$q_4(x, y, z) = x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz.$$

Aplicând metoda transformărilor ortogonale reducere la forma canonică a formelor pătratice, obţinem că baza ortonormată în care găsim forma canonică este

$$B = \left\{ \bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0),\ \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1),\ \bar{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2) \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Aceasta este formată din vectori proprii ortonormaţi, corespunzători valorilor proprii $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 6$ şi $\lambda_3 = 3$. Efectuând rotaţia spaţială directă

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}x' - \sqrt{2}y' + z') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}x' + \sqrt{2}y' - z') \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}y' + 2z'), \end{cases}$$

obţinem cuadrica

$$\Sigma_4 : -2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x' - \frac{36}{\sqrt{6}}z' + 14 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Sigma_4 : -2\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3y'^2 + 6\left(z' - \frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2 + 6 = 0.$$

Efectuând translaţia

$$\begin{cases} X = x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ Y = y' \\ Z = z' - \dfrac{3}{\sqrt{6}}, \end{cases}$$

găsim hiperboloidul cu două pânze

$$\Sigma_4 : -\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{2} + Z^2 + 1 = 0.$$

e) Matricea formei pătratice $q_5(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz$ a cuadricei Σ_5 are valorile proprii $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ şi $\lambda_3 = 3$. Baza ortonormată de vectori proprii în care se obţine forma canonică este

$$B = \left\{\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)\,,\ \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)\,,\ \overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Prin urmare, facând rotaţia spaţială directă

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}x' + 2z') \\ y = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}x' + \sqrt{3}y' - z') \\ z = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\sqrt{2}x' + \sqrt{3}y' + z'), \end{cases}$$

expresia cuadricei Σ_5 se reduce la

$$\Sigma_5 : y'^2 + 3z'^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}z' - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Sigma_5 : y'^2 + 3\left(z' + \frac{1}{3\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\left(x' - \frac{19\sqrt{3}}{72}\right) = 0.$$

În final, efectuând translaţia

$$\begin{cases} X = x' - \frac{19\sqrt{3}}{72} \\ Y = y' \\ Z = z' + \frac{1}{3\sqrt{6}}, \end{cases}$$

rezultă că cuadrica Σ_5 este paraboloidul eliptic

$$\Sigma_5 : Y^2 + \frac{Z^2}{\frac{1}{3}} = -\frac{4}{\sqrt{3}}X.$$

f) Reducând prin metoda valorilor şi vectorilor proprii (a transformărilor ortogonale) la forma canonică forma pătratică

$$q_6(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 - 12xy,$$

obţinem valorile proprii $\lambda_1 = 0$, de multiplicitate algebrică $m_1 = 2$, şi $\lambda_2 = 13$, de multiplicitate algebrică $m_2 = 1$. Baza ortonormată de vectori proprii în care se obţine forma canonică este

$$B = \left\{\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}(3, 2, 0), \ \overline{e}_2 = (0, 0, 1), \ \overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3, 0)\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Efectuând rotaţia spaţială directă

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & \sqrt{13} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(3x' + 2z') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2x' - 3z') \\ z = y', \end{cases}$$

în urma calculelor, expresia cuadricei Σ_6 se reduce la

$$\Sigma_6 : 169z'^2 + 2\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}z' + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Sigma_6 : \left(z' - \frac{\sqrt{13}}{169}\right)^2 + 2\sqrt{13}\left(x' + \frac{6}{13\sqrt{13}}\right) = 0.$$

Efectuând acum translaţia

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{6}{13\sqrt{13}} \\ Y = y' \\ Z = z' - \dfrac{\sqrt{13}}{169}, \end{cases}$$

deducem că cuadrica Σ_6 este cilindrul parabolic

$$\Sigma_6 : 169Z^2 + 2\sqrt{13}X = 0.$$

■

Problema 7.2.6 *Să se afle ecuaţia diametrului cuadricei*

$$\Sigma : 4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0,$$

care trece prin punctul $A(0, 0, 2)$. Să se determine apoi ecuaţia planului diametral conjugat acestui diametru.

Rezolvare. Coordonatele centrului de simetrie al cuadricei sunt $x_0 = -1/3$, $y_0 = 2/3$ şi $z_0 = 2/3$, ca soluţie a sistemului

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ 3y - 2 = 0 \\ 2z + x = 1. \end{cases}$$

În concluzie, ecuaţia diametrului căutat este ecuaţia dreptei ce trece prin A şi centrul cuadricei, adică

$$d : \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{4}.$$

Ecuaţia planului diametral conjugat direcţiei dreptei d, adică direcţiei $\overline{v} = \overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}$, este dată de $2x - 2y + 3z = 0$. ■

Problema 7.2.7 *Să se determine polul planului* $\pi : x + 3z + 2 = 0$ *în raport cu cuadrica*

$$\Sigma : 2x^2 + 3y^2 - 6xz + 8yz - 8x = 0$$

şi să se scrie ecuaţia planului polar corespunzător punctului $A(1, 2, 3)$, *în raport cu aceeaşi cuadrică.*

Rezolvare. Fie $P(\alpha, \beta, \gamma)$ polul planului π. Ecuaţia planului polar de pol P este

$$\mathcal{P}_P\Sigma : (4\alpha - 6\gamma - 8)x + (6\beta + 8\gamma)y + (-6\alpha + 8\beta)z - 8\alpha = 0.$$

Acest plan coincide cu planul π dacă

$$\frac{4\alpha - 6\gamma - 8}{1} = \frac{6\beta + 8\gamma}{0} = \frac{-6\alpha + 8\beta}{3} = \frac{-8\alpha}{2}.$$

Rezultă $\alpha = 64/37$, $\beta = -48/37$ şi $\gamma = 36/37$. Deoarece avem

$$f_x(x, y, z) = 4x - 6z - 8, \quad f_y(x, y, z) = 6y + 8z, \quad f_z(x, y, z) = -6x + 8y,$$

găsim ecuaţia planului polar de pol A:

$$\mathcal{P}_A\Sigma : -11x + 18y + 5z - 4 = 0.$$

■

Problema 7.2.8 *Să se scrie ecuaţiile planelor tangente şi ale dreptelor normale la cuadrica*

$$\Sigma : xy + z^2 - 2 = 0$$

în punctele ei de intersecţie cu axa Oz *şi în punctul* $A(-1, -1, 1)$.

Rezolvare. Derivatele parţiale ale funcţiei care defineşte cuadrica Σ sunt

$$f_x(x, y, z) = y, \quad f_y(x, y, z) = x, \quad f_z(x, y, z) = 2z,$$

şi, prin urmare, avem

$$(grad\ f)(x, y, z) = (y, x, 2z).$$

Punctele de intersecţie ale cuadricei Σ cu axa Oz sunt $P(0,0,\sqrt{2})$ şi $Q(0,0,-\sqrt{2})$, obţinute pentru $x = y = 0$. Avem atunci următorii gradienţi:

$$(grad\ f)(P) = (0,0,2\sqrt{2}), \quad (grad\ f)(Q) = (0,0,-2\sqrt{2}),$$
$$(grad\ f)(A) = (-1,-1,2).$$

În concluzie, ecuaţiile planelor tangente şi a normalelor cerute sunt:

$$T_P\Sigma : z - \sqrt{2} = 0, \quad T_Q\Sigma : z + \sqrt{2} = 0, \quad T_A\Sigma : x + y - 2z + 4 = 0.$$

$$N_P\Sigma : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases} \quad N_Q\Sigma : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases} \quad N_A\Sigma : \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

■

Problema 7.2.9 *Să se determine ecuaţia planului tangent π la paraboloidul eliptic*

$$\Sigma : \frac{x^2}{9} + y^2 = 2z,$$

care este perpendicular pe vectorul $\overline{v} = \overline{i} - \overline{k}$.

Rezolvare. Toate planele din spaţiu perpendiculare pe vectorul $\overline{v}$ sunt determinate de fascicolul de plane paralele

$$\pi_\lambda : x - z + \lambda = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alegem dintre aceste plane pe acela care are un singur punct comun cu paraboloidul eliptic Σ, adică pe acela care are proprietatea că sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 2z \\ x - z + \lambda = 0, \end{cases}$$

are soluţie unică. Scoţând $x = z - \lambda$ din a doua ecuaţie şi introducând în prima ecuaţie, obţinem

$$y^2 = 2z - \frac{(z-\lambda)^2}{9}.$$

Unicitatea soluţiei ecuaţiei în y implică ecuaţia $(z - \lambda)^2 = 18z$. Punând condiţia ca discriminantul să se anuleze, găsim $\lambda = -9/2$. În concluzie, ecuaţia planului căutat este

$$\pi : x - z - \frac{9}{2} = 0.$$

■

Problema 7.2.10 *Să se determine sfera S în fiecare din următoarele cazuri, cunoscând că:*

a) *este tangentă la planul $\pi : x - z = 0$ şi are centrul $C(2, 0, -3)$.*

b) *este tangentă la planul $\pi' : x + y + 1 = 0$ în punctul $E(-1, 0, 0)$ şi, de asemenea, este tangentă la planul $\pi'' : x + y + z = 0$.*

c) *trece prin punctele necoplanare $O(0, 0, 0)$, $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, 0)$ şi $D(1, 0, 0)$.*

Rezolvare. a) Raza sferei este $R = d(C, \pi) = 5/\sqrt{2}$. În concluzie, ecuaţia sferei este

$$S : (x - 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = \frac{25}{2}.$$

b) Fie $C(\alpha, \beta, \gamma)$ centrul sferei căutate şi $R > 0$ raza acesteia. Ecuaţia sferei este

$$S : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2.$$

Deoarece sfera S trece prin punctul E şi este tangentă la planul π'', obţinem ecuaţiile:

$$\begin{cases} (1 + \alpha)^2 + \beta^2 + \gamma^2 = R^2 \\ |\alpha + \beta + \gamma| = R\sqrt{3}. \end{cases}$$

Ecuaţia planului tangent în punctul E al sferei S este

$$T_E S : (\alpha + 1)x + \beta y + \gamma z + \alpha + 1 = 0,$$

şi coincide cu ecuaţia planului π'. Din proporţionalitatea coeficienţilor celor două ecuaţii, găsim $\beta = \alpha + 1$ şi $\gamma = 0$. Înlocuind în ecuaţiile anterioare, obţinem $\alpha_{1,2} = (-4 \pm \sqrt{6})/2$, $\beta_{1,2} = (-2 \pm \sqrt{6})/2$ şi $R_{1,2} = \sqrt{3} \mp \sqrt{2}$. În concluzie, avem două sfere cu proprietatea din enunţ:

$$S_{1,2} : \left(x + \frac{4 \mp \sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{2 \mp \sqrt{6}}{2}\right)^2 + z^2 = 5 \mp 2\sqrt{6}.$$

c) Folosind ecuaţia sub formă de determinant a sferei ce trece prin patru puncte, rezultă

$$S : \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

■

Problema 7.2.11 *Se dă sfera* $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 11 = 0$. *Să se determine coordonatele centrului şi raza cercului* Γ *situat la intersecţia dintre sfera* Σ *şi planul* $\pi : 2x - y + 2z + 21 = 0$.

Rezolvare. Restrângând pătratele în ecuaţia sferei, obţinem centrul sferei $C(-1, 3, -2)$ şi raza $R = 5$. Distanţa de la centrul C la planul π este dată de formula

$$d = \frac{|-2 - 3 - 4 + 21|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 4 < 5.$$

Raza r a cercului Γ se află folosind teorema lui Pitagora: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = 3$.

Pentru a determina coordonatele centrului O al cercului Γ, observăm că punctul O se află la intersecţia dintre planul π si dreapta care trece prin centrul sferei C şi este perpendiculară pe π. Cu alte cuvinte, coordonatele lui O sunt soluţia sistemului

$$\begin{cases} 2x - y + 2z + 21 = 0 \\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+2}{2}. \end{cases}$$

Găsim că $x = -11/3$, $y = 13/3$ şi $z = -14/3$. ■

Problema 7.2.12 *Să se determine coordonatele punctului* H *de intersecţie dintre planul triunghiului* ABC *şi axul radical al sferelor care au ca diametre laturile triunghiului, ştiind că vârfurile triunghiului* ABC *au coordonatele* $A(1, 3, -4)$, $B(3, 1, 2)$ *şi* $C(-1/3, -1/3, 1/6)$.

Rezolvare. Ecuaţia planului triunghiului ABC este descrisă de

$$\pi : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1/3 & -1/3 & 1/6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi : 5x - 7y - 4z = 0.$$

Coordonatele centrelor sferelor, care au ca diametre laturile triunghiului ABC, sunt mijloacele laturilor triunghiului, şi anume

$$O_1(2, 2, -1), \quad O_2\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{23}{12}\right), \quad O_3\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{13}{12}\right),$$

iar razele acestor sfere sunt

$$R_1 = \frac{AB}{2} = \sqrt{11}, \quad R_2 = \frac{AC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1089}{36}}, \quad R_3 = \frac{BC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{585}{36}}.$$

În urma calculelor, ecuaţiile sferelor devin:

$$\begin{aligned} S_{AB} &: x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 2z - 2 = 0; \\ S_{AC} &: x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}y + \frac{23}{6}z - 2 = 0; \\ S_{BC} &: x^2 + y^2 + z^2 - \frac{8}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{13}{6}z - 1 = 0. \end{aligned}$$

Prin urmare, ecuaţiile care definesc axa radicală a celor trei sfere devin

$$\begin{cases} 20x + 8y + 11z = 0 \\ 2x - 2y + 6z = 1. \end{cases}$$

Coordonatele punctului H de intersecţie dintre planul triunghiului ABC şi axul radical al sferelor care au ca diametre laturile triunghiului sunt date de soluţia sistemului

$$\begin{cases} 20x + 8y + 11z = 0 \\ 2x - 2y + 6z = 1 \\ 5x - 7y - 4z = 0. \end{cases}$$

În concluzie, acestea vor fi $x = -1/28$, $y = -3/28$ şi $z = 1/7$ ■

Problema 7.2.13 *Se dă paraboloidul hiperbolic*

$$\Sigma : \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = y.$$

Să se calculeze unghiul dintre generatoarele rectilinii ale cuadricei Σ*, care trec prin punctul* $A(3, 1, 0)$*.*

Rezolvare. Prin punctul $A(3, 1, 0)$ trec două generatoare ale paraboloidului hiperbolic Σ. Este vorba despre generatoarele

$$d_{\lambda=1} : \begin{cases} \frac{x}{3} - y - \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{3} + \frac{z}{2} - 1 = 0, \end{cases} \qquad d_{\mu=1} : \begin{cases} \frac{x}{3} - y + \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{3} - \frac{z}{2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Vectorii directori ai acestor generatoare sunt:

$$\overline{v}_{\lambda=1} = \left(\frac{1}{3}\overline{i} - \overline{j} - \frac{1}{2}\overline{k}\right) \times \left(\frac{1}{3}\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{k}\right) = -\frac{1}{2}\overline{i} - \frac{1}{3}\overline{j} + \frac{1}{3}\overline{k},$$

$$\overline{v}_{\mu=1} = \left(\frac{1}{3}\overline{i} - \overline{j} + \frac{1}{2}\overline{k}\right) \times \left(\frac{1}{3}\overline{i} - \frac{1}{2}\overline{k}\right) = \frac{1}{2}\overline{i} + \frac{1}{3}\overline{j} + \frac{1}{3}\overline{k}.$$

În concluzie, unghiul φ dintre generatoarele $d_{\lambda=1}$ şi $d_{\mu=1}$ este dat de formula

$$\cos\varphi = \frac{< \overline{v}_{\lambda=1}, \overline{v}_{\mu=1} >}{||\overline{v}_{\lambda=1}|| \cdot ||\overline{v}_{\mu=1}||} = -\frac{9}{17}.$$

■

Problema 7.2.14 *Să se determine locul geometric al punctelor de pe hiperboloidul cu o pânză*

$$\Sigma : \frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{4} - 1 = 0,$$

prin care trec generatoare rectilinii perpendiculare.

Rezolvare. Deoarece generatoarele de la infinit (cele care se intersectează) nu sunt perpendiculare, vom studia problema doar pentru generatoarele

$$d_\lambda : \begin{cases} \dfrac{x}{2} - y = \lambda\left(1 - \dfrac{z}{2}\right) \\ \dfrac{x}{2} + y = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 + \dfrac{z}{2}\right) \end{cases}, \quad d_\mu : \begin{cases} \dfrac{x}{2} - y = \mu\left(1 + \dfrac{z}{2}\right) \\ \dfrac{x}{2} + y = \dfrac{1}{\mu}\left(1 - \dfrac{z}{2}\right) \end{cases},$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, ale căror vectori directori sunt

$$\begin{aligned} \overline{v}_\lambda &= \left(\frac{1}{2}\overline{i} - \overline{j} + \frac{\lambda}{2}\overline{k}\right) \times \left(\frac{1}{2}\overline{i} + \overline{j} - \frac{1}{2\lambda}\overline{k}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2}\right)\overline{i} + \left(\frac{1}{4\lambda} + \frac{\lambda}{4}\right)\overline{j} + \overline{k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{v}_\mu &= \left(\frac{1}{2}\overline{i} - \overline{j} - \frac{\mu}{2}\overline{k}\right) \times \left(\frac{1}{2}\overline{i} + \overline{j} + \frac{1}{2\mu}\overline{k}\right) = \\ &= \left(-\frac{1}{2\mu} + \frac{\mu}{2}\right)\overline{i} - \left(\frac{1}{4\mu} + \frac{\mu}{4}\right)\overline{j} + \overline{k}. \end{aligned}$$

Fie $M(\alpha, \beta, \gamma)$ un punct de pe hiperboloidul cu o pânză Σ. Cu alte cuvinte, avem

$$\Sigma : \alpha^2 - 4\beta^2 + \gamma^2 = 4.$$

Prin punctul M trec două generatoare corespunzătoare valorilor

$$\lambda = \frac{\alpha - 2\beta}{2-\gamma}, \quad \mu = \frac{\alpha - 2\beta}{2+\gamma}, \ \gamma \neq \pm 2.$$

Condiţia de perpendicularitate a generatoarelor d_λ şi d_μ se reduce la

$$\langle \overline{v}_\lambda, \overline{v}_\mu \rangle = 0 \Leftrightarrow 5\lambda^2\mu^2 - 3(\lambda^2+\mu^2) - 16\lambda\mu + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{8\mu \pm \sqrt{15}\cdot(\mu^2+1)}{5\mu^2-3}, \ \mu \neq \pm\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Înlocuind λ şi μ, în urma calculelor, obţinem cuadricele

$$\Sigma'_{1,2} : 5\alpha^2 + 20\beta^2 + 5\gamma^2 - 20\alpha\beta \mp 4\sqrt{15}\cdot\beta\gamma \mp 4\sqrt{15}\cdot\alpha - 12\gamma - 44 = 0.$$

În concluzie, locul geometric cerut este format din toate punctele $M(\alpha,\beta,\gamma)$ care verifică ecuaţiile cuadricelor Σ şi Σ'_1, respectiv Σ şi Σ'_2. Cu alte cuvinte, punctele M aparţin mulţimii $(\Sigma \cap \Sigma'_1) \cup (\Sigma \cap \Sigma'_2)$, din care se scot punctele impuse de condiţiile de existenţă de mai sus. ■

7.3 Probleme propuse

Problema 7.3.1 *Fie sfera $S : x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$. Să se scrie ecuaţia planului tangent la sferă în punctul $A(3,-2,0)$ şi să se determine raza cercului obţinut prin intersecţia sferei cu planul $\pi : x-2y+2\sqrt{5}z=0$.*

R. $T_AS : x-3=0$; $r=\sqrt{3}$.

Problema 7.3.2 *Să se determine sfera S în fiecare din următoarele cazuri:*

a) *trece prin punctele necoplanare $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ şi $C(0,0,c)$, unde $a>0$, $b>0$ şi $c>0$;*

b) *are centrul pe dreapta $d : x = 2y-2 = 2z+4$, trece prin punctul $A(1,1,0)$ şi este tangentă dreptei $d' : 2x-2 = 2y-2 = z$;*

c) *are centrul situat în planul $\pi : x+2y-z-1=0$ şi trece prin cercul*

$$\Gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z+5=0 \\ x+y-z-4=0. \end{cases}$$

R. a) $S: x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$; b) $S:(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$; c) Sfera căutată aparţine familiei de sfere

$$S_\lambda : x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z+5+\lambda(x+y-z-4)=0,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Punând condiţia ca centrul acestei sfere să aparţină planului π, găsim $\lambda=2$. Deci, sfera căutată are ecuaţia

$$S: x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-3=0 \Leftrightarrow$$
$$S:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9.$$

Problema 7.3.3 *Se consideră sferele* $S_1 : x^2+y^2+z^2-3=0$ *şi* $S_2 : x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$.

a) *să se scrie ecuaţia planului radical al celor două sfere;*

b) *să se scrie ecuaţia fascicolului determinat de cele două sfere şi să se determine sfera din fascicol, care este tangentă la planul* $\pi : x-y+4z+4=0$.

R. a) $\mathcal{PR}: x-y+2z=0$; b) Ecuaţia fascicolului de sfere este $S_1+\lambda S_2=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Punând condiţia ca distanţa de la centru la planul π să fie egală cu raza, găsim $\lambda_1=1$ şi $\lambda_2=-19/17$.

Problema 7.3.4 *Să se determine valoarea parametrului real* λ, *astfel încât planul* $\pi : x+y+z-\lambda=0$ *să fie tangent la sfera*

$$S: x^2+y^2+z^2+2x-4y+2=0,$$

şi să se afle coordonatele punctului de contact dintre acestea.

R. $\lambda_1=-2$, $P_1(-2,1,-1)$; $\lambda_2=4$, $P_2(0,3,1)$.

Problema 7.3.5 *Se dă un tetraedru tridreptunghic* $SABC$. *Din vârful* S *se coboară perpendiculara pe planul* ABC *şi se prelungeşte până se intersectează cu sfera circumscrisă tetraedrului. Să se arate că* $3SP=SI$, *unde* P *este piciorul perpendicularei pe planul triunghiului* ABC *iar* I *este punctul de intersecţie cu sfera.*

R. Dacă $S(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$, unde $a>0$, $b>0$ *şi* $c>0$, atunci

$$SI=3SP=\frac{3}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}.$$

Problema 7.3.6 *Să se determine punctele de pe elipsoidul*

$$\Sigma : 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 9 = 0,$$

în care normalele la suprafaţă sunt paralele cu dreapta

$$d : \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-2}.$$

R. $P_1(-1, 1, 2)$ şi $P_2(1, -1, -2)$.

Problema 7.3.7 *Să se găsească planul polar al originii în raport cu cuadrica*

$$\Sigma : x^2 + 2y^2 - z^2 - 4xy + 6y - 2 = 0$$

şi să se determine polul planului $\pi : x + y + z - 5 = 0$ *în raport cu aceasta.*

R. $\mathcal{P}_O\Sigma : 3y - 2 = 0$; Polul planului π este punctul $P(13, 9, 5)$.

Problema 7.3.8 *Să se determine ecuaţia planului diametral al cuadricei*

$$\Sigma : x^2 + 2y^2 - z^2 - 4xy + 6y - 4z - 2 = 0,$$

care este paralel cu planul $\pi : 2x - y - z = 0$.

R. $4x - 2y - 2z - 13 = 0$.

Problema 7.3.9 *Să se determine centrul de simetrie al cuadricei*

$$\Sigma : x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0,$$

precum şi un reper în raport cu care cuadrica admite formă canonică.

R. Centrul cuadricei este $C(-1/3, -2/3, 2/3)$. Reperul căutat $\mathcal{O}XYZ$ are originea în centrul $\mathcal{O} = C$ şi are direcţiile axelor $\mathcal{O}X$, $\mathcal{O}Y$ şi $\mathcal{O}Z$ determinate de versorii

$$\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), \ \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \ \overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1).$$

Problema 7.3.10 *Să se reducă la formă canonică (precizându-se roto-translaţiile spaţiale efectuate) şi să se recunoască cuadricele:*

a) $\Sigma_1 : 5x^2 - 8y^2 + 5z^2 - 6xz + 8 = 0$;

b) $\Sigma_2 : x^2 - y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 5x - 1 = 0$;

c) $\Sigma_3 : x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 12x + 4y + 6z - 3 = 0$;

d) $\Sigma_4 : x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 10yz + 2x + 2y + 2z + 3 = 0$;

e) $\Sigma_5 : x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 6x - 6y + 8 = 0$;

f) $\Sigma_6 : x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 12x + 4y + 6z - 3 = 0$;

g) $\Sigma_7 : 2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0$;

h) $\Sigma_8 : 4x^2 + 9y^2 - 12xy + 2x + 10y + 1 = 0$;

i) $\Sigma_9 : x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 6x - 6y + 9 = 0$;

j) $\Sigma_{10} : z^2 + 4xy - 1 = 0$.

R. a) $\Sigma_1 : -X^2 + \dfrac{Y^2}{4} + Z^2 + 1 = 0$ - hiperboloid cu două pânze; $C(0,0,0)$ - centrul cuadricei; $\overline{e}_1 = (0,1,0)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $\overline{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ - direcţiile axelor CX, CY şi CZ.

b) $\Sigma_2 : X^2 + 2Y^2 - 2Z^2 - 33/8 = 0$ - hiperboloid cu o pânză; $C(5/4, -5/4, 0)$ - centrul cuadricei; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $\overline{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$ - direcţiile axelor CX, CY şi CZ.

c) $\Sigma_3 : Y^2 + 2Z^2 - \dfrac{8}{\sqrt{2}}X = 0$ - paraboloid eliptic; $\mathcal{O}(-3/2, -11/2, -3)$ - originea sistemului de axe $\mathcal{O}XYZ$; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $\overline{e}_2 = (0,0,1)$, $\overline{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ - direcţiile axelor $\mathcal{O}X$, $\mathcal{O}Y$ şi $\mathcal{O}Z$.

d) $\Sigma_4 : 4X^2 - 18Y^2 + 2Z^2 + 1 = 0$ - hiperboloid cu două pânze; $C(-1/2, -1, -1)$ - centrul cuadricei; $\overline{e}_1 = (1,0,0)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$, $\overline{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$ - direcţiile axelor CX, CY şi CZ.

e) $\Sigma_5 : X^2 + 3Z^2 - 1 = 0$ - cilindru eliptic; $\mathcal{O}(-2,1,1)$ - originea sistemului de axe $\mathcal{O}XYZ$; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\overline{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ - direcţiile axelor $\mathcal{O}X$, $\mathcal{O}Y$ şi $\mathcal{O}Z$.

f) $\Sigma_6 : X^2 + 2Z^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}Y = 0$ - paraboloid eliptic; $\mathcal{O}(0, 2, -3)$ - originea sistemului de axe $\mathcal{O}XYZ$; $\overline{e}_1 = (0, 0, 1)$, $\overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, $\overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ - direcţiile axelor $\mathcal{O}X$, $\mathcal{O}Y$ şi $\mathcal{O}Z$.

g) $\Sigma_7 : -4Y^2 + 6Z^2 - \sqrt{6}X = 0$ - paraboloid hiperbolic; $\mathcal{O}(55/48, -98/48, -19/48)$ - originea sistemului de axe $\mathcal{O}XYZ$; $\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$, $\overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $\overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$ - direcţiile axelor $\mathcal{O}X$, $\mathcal{O}Y$ şi $\mathcal{O}Z$.

h) $\Sigma_8 : 13Z^2 + 2\sqrt{13}X = 0$ - cilindru parabolic; $\mathcal{O}(2/13, -3/13, 0)$ - originea sistemului de axe $\mathcal{O}XYZ$; $\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}(3, 2, 0)$, $\overline{e}_2 = (0, 0, 1)$, $\overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3, 0)$ - direcţiile axelor $\mathcal{O}X$, $\mathcal{O}Y$ şi $\mathcal{O}Z$.

i) $\Sigma_9 : X^2 + 3Z^2 = 0$ - dreaptă dublă; $\mathcal{O}(-2, 1, 1)$ - originea sistemului de axe $\mathcal{O}XYZ$; $\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$ - direcţiile axelor $\mathcal{O}X$, $\mathcal{O}Y$ şi $\mathcal{O}Z$.

j) $\Sigma_{10} : X^2 - 2Y^2 + 2Z^2 - 1 = 0$ - hiperboloid cu o pânză; $C(0, 0, 0)$ - centrul cuadricei; $\overline{e}_1 = (0, 0, 1)$, $\overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, $\overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ - direcţiile axelor CX, CY şi CZ.

Problema 7.3.11 *Să se discute natura şi tipul cuadricelor*

$$\Sigma_\lambda : x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda(xy + xz + yz) = 0, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

R. Dacă $\lambda \in (-\infty, -1/2) \cup (1, \infty)$, atunci cuadrica este un *con circular*; Dacă $\lambda \in (-1/2, 1)$, atunci cuadrica este un *punct dublu*; Dacă $\lambda = -1/2$, atunci cuadrica este un *dreaptă dublă*; Dacă $\lambda = 1$, atunci cuadrica este un *plan confundat*.

Problema 7.3.12 *Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză*

$$\Sigma : x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} - 1 = 0,$$

care trec prin punctul $A(1, 4, 8)$ *şi să se calculeze unghiul dintre acestea.*

R. Generatoarele căutate sunt

$$d_1 : \begin{cases} 2x + 2y - z - 2 = 0 \\ 2x - 2y + z - 2 = 0 \end{cases} \text{ şi } d_2 : \begin{cases} 10x + 6y - 5z + 6 = 0 \\ 6x - 10y + 3z + 10 = 0. \end{cases}$$

Unghiul dintre aceste generatoare $\cos\theta = 83/85$.

Problema 7.3.13 *Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic*

$$\Sigma : \frac{x^2}{4} - y^2 = 4z,$$

care sunt paralele cu planul $\pi : 3x + 2y - 4z = 0$.

R. Generatoarele căutate sunt

$$d_1 : \begin{cases} x - 2y - 4z = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \text{ şi } d_2 : \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 8 = 0. \end{cases}$$

Problema 7.3.14 *Să se determine generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză*

$$\Sigma : x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0,$$

care sunt conţinute în planul $\pi : 6x + 3y - 2z + 6 = 0$.

R. Există o singură generatoare, şi anume

$$d : \begin{cases} 6x - 3y + 2z + 6 = 0 \\ 6x + 3y - 2z + 6 = 0. \end{cases}$$

Problema 7.3.15 *Să se arate că locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de dreptele*

$$d_1 : x + 1 = y - 1 = z - 1, \quad d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}$$

este o cuadrică riglată şi să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii de la infinit ale acestei cuadrice.

R. Locul geometric căutat este cuadrica

$$\Sigma : x^2 - 2y^2 + z^2 + 8xy + 2xz + 8yz - 24x + 12y + 24z - 2 = 0,$$

care redusă la forma canonică este paraboloidul hiperbolic

$$\Sigma : Y^2 - Z^2 = 4\sqrt{2}X,$$

unde $\mathcal{O}(-2/3, 1/3, -2/3)$ este originea sistemului de axe $\mathcal{O}XYZ$ iar

$$\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1),\ \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),\ \overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$$

reprezintă direcţiile axelor $\mathcal{O}X$, $\mathcal{O}Y$ şi $\mathcal{O}Z$. Generatoarele la infinit ale paraboloidului hiperbolic Σ sunt

$$d_{\infty} : \begin{cases} (\sqrt{2}-1)x + (\sqrt{2}+2)y + (\sqrt{2}-1)z + \sqrt{2} - 2 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

şi

$$d_{-\infty} : \begin{cases} (\sqrt{2}+1)x + (\sqrt{2}-2)y + (\sqrt{2}+1)z + \sqrt{2} + 2 = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}$$

Capitolul 8

Generări de suprafeţe

8.1 Elemente teoretice fundamentale

Să considerăm spaţiul punctual euclidian al vectorilor liberi din spaţiu $\mathcal{E}_3 = (E_3, V_3, \varphi)$ şi $\mathcal{R} = \{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ un reper ortonormat în acest spaţiu.

Definiţia 8.1.1 *Se numeşte **suprafaţă cilindrică** $\Sigma \subset \mathcal{E}_3$, de **curbă directoare***

$$\Gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 : \begin{cases} f(x,y,z) = 0 & (\Sigma_1) \\ g(x,y,z) = 0 & (\Sigma_2) \end{cases}$$

*şi **dreaptă generatoare***

$$d = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\pi_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\pi_2), \end{cases}$$

o suprafaţă $\Sigma \subset \mathcal{E}_3$ obţinută prin deplasarea, paralel cu dreapta d, a unei drepte care se sprijină pe curba directoare Γ.

Teorema 8.1.1 *Ecuaţia suprafeţei cilindrice Σ de curbă directoare Γ şi dreaptă generatoare d are expresia*

$$\Sigma : \Phi(\pi_1, \pi_2) = 0,$$

unde π_1 şi π_2 sunt ecuaţiile planelor ce determină generatoarea d iar $\Phi(\lambda, \mu) = 0$ este condiţia de compatibilitate a sistemului în x, y, z, descris de ecuaţiile

$$\begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \\ \pi_1 = \lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ \pi_2 = \mu, & \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Definiţia 8.1.2 *Se numeşte* ***suprafaţă conică*** $\Sigma \subset \mathcal{E}_3$, *de* ***curbă directoare*** $\Gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ *şi* ***vârf*** $V(x_0, y_0, z_0)$, *suprafaţa obţinută prin deplasarea unei drepte care trece prin punctul fix V şi se sprijină pe curba directoare Γ.*

Teorema 8.1.2 *Ecuaţia suprafeţei conice Σ de curbă directoare Γ şi vârf V este dată de*

$$\Sigma' : \Phi\left(\frac{\pi_1}{\pi_2}, \frac{\pi_2}{\pi_3}\right) = 0,$$

unde $\pi_1 : x - x_0 = 0, \pi_2 : y - y_0 = 0$ şi $\pi_3 : z - z_0 = 0$ sunt planele ortogonale care formează un triedru tridreptunghic în vârful V, $\Sigma' = \Sigma \backslash \{P(x, y, z) \mid \pi_2 \cdot \pi_3 = 0\}$ iar $\Phi(\lambda, \mu) = 0$ este condiţia de compatibilitate a sistemului în x, y, z, descris de ecuaţiile

$$\begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \\ \pi_1 - \lambda\pi_2 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \pi_2 - \mu\pi_3 = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Definiţia 8.1.3 *Se numeşte* ***suprafaţă conoidă*** $\Sigma \subset \mathcal{E}_3$, *de* ***plan director*** $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, ***dreaptă generatoare*** $d = \pi_1 \cap \pi_2$ *şi* ***curbă directoare*** $\Gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, *suprafaţa obţinută prin deplasarea unei drepte mobile, paralelă cu planul π, care intersectează dreapta d şi se sprijină pe curba directoare Γ.*

Teorema 8.1.3 *Ecuaţia suprafeţei conoide Σ de plan director π, generatoare d, şi curbă directoare Γ este exprimată prin*

$$\Sigma' : \Phi\left(\pi, \frac{\pi_1}{\pi_2}\right) = 0,$$

unde π, π_1 şi π_2 sunt ecuaţiile planelor ce intervin în construcţia suprafeţei conoide, $\Sigma' = \Sigma \backslash \{P(x, y, z) \mid \pi_2 = 0\}$ iar $\Phi(\lambda, \mu) = 0$ este condiţia de compatibilitate a sistemului în x, y, z, descris de ecuaţiile

$$\begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \\ \pi = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \pi_1 - \mu\pi_2 = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Definiţia 8.1.4 *Se numeşte* ***suprafaţă de rotaţie*** $\Sigma \subset \mathcal{E}_3$, *de* ***curbă directoare*** $\Gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ *şi* ***axă de rotaţie***

$$d : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

suprafaţa obţinută prin rotirea curbei Γ în jurul axei d.

Teorema 8.1.4 *Suprafaţa de rotaţie Σ de curbă directoare Γ şi axă d este descrisă de ecuaţia*

$$\Sigma : \Phi\left(lx + my + nz, \pm\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\right) = 0,$$

unde $\Phi(\lambda, \mu) = 0$ este condiţia de compatibilitate a sistemului în x, y, z, descris de ecuaţiile

$$\begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \\ lx + my + nz = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \mu^2, \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

8.2 Probleme rezolvate

Problema 8.2.1 *Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice Σ, care are generatoarele paralele cu dreapta d şi are curba directoare Γ, în următoarele cazuri:*

a) $\Gamma : x^2 + 2y^2 - z = 0$, $x - 1 = 0$ *şi* $d : x + y = 0$, $z = 0$.

b) $\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $2x - 3y + z = 0$ *şi dreapta d are vectorul director* $\overline{v} = 2\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$.

c) $\Gamma : x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, $t \in [0, 2\pi]$ *şi dreapta d are parametri directori* $(-1, 3, -2)$.

Rezolvare. a) Fie sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ale cărui soluţii (obţinute doar din ultimele trei ecuaţii) sunt $x = 1$, $y = \lambda - 1$ şi $z = \mu$. Condiţia de compatibilitate algebrică (de sprijin, din punct de vedere geometric) este $1 + 2(\lambda - 1)^2 - \mu = 0$. În concluzie, ţinând cont că $\lambda = x + y$ şi $\mu = z$, obţinem ecuaţia suprafeţei cilindrice

$$\Sigma : 2(x + y - 1)^2 - z + 1 = 0.$$

b) Să considerăm dreapta d care trece prin origine şi este direcţionată de $\overline{v}$:

$$d : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} \Leftrightarrow d : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2y - z = 0. \end{cases}$$

Soluţia sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x - 2y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ 2y - z = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$$

este $x = (2\mu - \lambda)/3$, $y = (\mu - 2\lambda)/3$ şi $z = -(\mu + 4\lambda)/3$. Condiţia de compatibilitate (de sprijin) se reduce la

$$(2\mu - \lambda)^2 + (\mu - 2\lambda)^2 + (\mu + 4\lambda)^2 = 9 \Leftrightarrow 2\mu^2 + 7\lambda^2 = 3.$$

Deoarece $\lambda = x - 2y$ şi $\mu = 2y - z$, deducem că ecuaţia suprafeţei cilindrice căutate este

$$\Sigma : 2(2y - z)^2 + 7(x - 2y)^2 = 3.$$

c) Ecuaţia carteziană a curbei Γ (ca intersecţie de suprafeţe) este

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

iar o dreaptă cu parametri directori $(-1, 3, -2)$ este

$$d : \frac{x}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2} \Leftrightarrow d : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ -2x + z = 0. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \\ 3x + y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ -2x + z = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

găsim $x = -\mu/2$, $y = (2\lambda + 3\mu)/2$ şi $z = 0$, cu condiţia de compatibilitate $\mu^2 + (2\lambda + 3\mu)^2 = 4$. Ţinând cont de faptul că $\lambda = 3x + y$ şi $\mu = -2x + z$, obţinem ecuaţia suprafeţei cilindrice

$$\Sigma : (z - 2x)^2 + (2y + 3z)^2 = 4.$$

■

Problema 8.2.2 *Să se determine ecuaţiile carteziene care descriu proiecţia curbei* $\Gamma : x^2 + yz = 0$, $2x - z - 1 = 0$ *pe planul* xOy.

Rezolvare. Deoarece planul xOy are ca direcţie normală axa Oz, să considerăm cilindrul având curba directoare Γ şi generatoarele paralele cu axa $Oz : x = 0$, $y = 0$. Sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \\ x = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ y = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$$

are soluţia $x = \lambda$, $y = \mu$ şi $z = 2\lambda - 1$, cu condiţia de compatibilitate $\lambda^2 + \mu(2\lambda - 1) = 0$. Obţinem ecuaţia cilindrului

$$\Sigma : x^2 + 2xy - y = 0.$$

Intersecţia cilindrului Σ cu planul xOy conduce la determinarea proiecţiei căutate:

$$\Gamma' = pr_{xOy}\, \Gamma : \begin{cases} x^2 + 2xy - y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

■

Problema 8.2.3 *Să se demostreze că proiecţia* ***curbei lui Viviani***

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 = Rx, \quad R > 0, \end{cases}$$

pe planul xOz *este o parabolă.*

Rezolvare. Se scrie ecuaţia cilindrului care are curba directoare Γ şi generatoarele paralele cu axa Oy, apoi se face intersecţia acestuia cu planul xOz.

Ecuaţiile generatoarelor cilindrului sunt $x = \lambda$, $z = \mu$. Obţinem $y = \pm\sqrt{R^2 - \lambda^2 - \mu^2}$ şi condiţia de sprijin $\mu^2 + R\lambda - R^2 = 0$. În concluzie, proiecţia curbei lui Viviani pe planul xOz este parabola

$$\Gamma' = pr_{xOz}\, \Gamma : \begin{cases} z^2 + Rx - R^2 = 0, \quad R > 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

■

Problema 8.2.4 *Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice* Σ *cu vârful în* $V(1,1,1)$ *şi având curba directoare*

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Rezolvare. Vârful V se află la intersecţia planelor $x - 1 = 0$, $y - 1 = 0$ şi $z - 1 = 0$. Rezolvând sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ z = 0 \\ x - 1 - \lambda(y - 1) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ y - 1 - \mu(z - 1) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

găsim $x = 1 - \lambda\mu$, $y = 1 - \mu$ şi $z = 0$. Condiţia de compatibilitate a sistemului este $(1 - \lambda\mu)^2 + (1 - \mu)^2 = 4$, adică avem suprafaţa conică

$$\Sigma' : (z - x)^2 + (z - y)^2 = 4(z - 1)^2,$$

unde $\Sigma' = \Sigma \backslash \{P(x, y, z) \mid (y - 1)(z - 1) = 0\}$. ■

Problema 8.2.5 *Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice cu vârful* V*, situat la intersecţia planelor* $x + 3z - 10 = 0$, $y - 2 = 0$, *şi* $x - z + 2 = 0$ *şi care are drept curbă directoare curba*

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + z^2 - 2x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Rezolvare. Să considerăm sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 + z^2 - 2x = 0 \\ y = 0 \\ x + 3z - 10 - \lambda(y - 2) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ y - 2 - \mu(x - z + 2) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ale cărui soluţii sunt

$$x = \frac{2\mu - \lambda\mu - 3}{2\mu}, \quad y = 0, \quad z = \frac{6\mu - \lambda\mu + 1}{2\mu}.$$

Condiţia de compatibilitate (de sprijin) este

$$\frac{(2\mu - \lambda\mu - 3)^2}{4\mu^2} + \frac{(6\mu - \lambda\mu + 1)^2}{4\mu^2} = \frac{2\mu - \lambda\mu - 3}{\mu}.$$

Aceasta conduce, în urma calculelor, la suprafaţa conică

$$\Sigma' : (y - 2x)^2 + (3y - 2z)^2 = (y - 2)(2y - 4x),$$

unde $\Sigma' = \Sigma \backslash \{P(x, y, z) \mid (y - 2)(x - z + 2) = 0\}$. ■

Problema 8.2.6 *Să se determine locul geometric Σ descris de tangentele duse din origine la sfera*

$$S : (x-5)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 16.$$

Rezolvare. Mulţimea tuturor dreptelor din spaţiu, care trec prin originea sistemului de axe, este descrisă de fascicolul

$$d_{\lambda\mu} : \begin{cases} x - \lambda y = 0, & \lambda \in \mathbb{R} \\ y - \mu z = 0, & \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Condiţia de tangenţă la sferă a dreptelor $d_{\lambda\mu}$ este determinată de condiţia ca sistemul

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 16 \\ x - \lambda y = 0 \\ y - \mu z = 0 \end{cases}$$

să aibă soluţie unică. Deoarece $x = \lambda\mu z$ şi $y = \mu z$, deducem că ecuaţia de gradul doi

$$(\lambda\mu z - 5)^2 + (\mu z + 1)^2 + z^2 = 16$$

trebuie să aibă discriminantul egal cu zero. Rezultă condiţia de sprijin $15\lambda^2\mu^2 - 9\mu^2 - 10\lambda\mu^2 - 10 = 0$, din care obţinem ecuaţia suprafeţei conice

$$\Sigma' : 15x^2 - 9y^2 - 10xy - 10z^2 = 0,$$

unde $\Sigma' = \Sigma \backslash \{P(x,y,z) \mid y \cdot z = 0\}$. ■

Problema 8.2.7 *Să se scrie ecuaţia suprafeţei generate de drepte care se sprijină pe axa Oz şi curba*

$$\Gamma : \begin{cases} y^2 - 2z + 2 = 0 \\ x^2 - 2z + 1 = 0, \end{cases}$$

şi rămân paralele cu planul xOy.

Rezolvare. Deoarece planul xOy este descris de ecuaţia $z = 0$ iar axa Oz are ecuaţia

$$Oz : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases}$$

rezultă că generatoarele suprafeţei căutate sunt

$$d_{\lambda\mu} : \begin{cases} z = \lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ x - \mu y = 0, & \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Condiţia de sprijin pe curba Γ este

$$2\lambda\mu^2 - 2\lambda - 2\mu^2 + 1 = 0,\ \lambda \geq 1/2,\ \mu \neq 0,$$

şi, deci, obţinem conoidul de plan director xOy, de ecuaţie

$$\Sigma : 2zx^2 - 2zy^2 - 2x^2 + y^2 = 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \geq \frac{1}{2}.$$

■

Problema 8.2.8 *Să se scrie ecuaţia suprafeţei generate de drepte care se sprijină pe axa Oz şi curba $\Gamma : x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\quad t \in \mathbb{R}$ şi rămân paralele cu planul xOy.*

Rezolvare. Generatoarele suprafeţei sunt

$$d_{\lambda\mu} : \begin{cases} z = \lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ x - \mu y = 0, & \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$$

iar ecuaţia carteziană a curbei Γ este

$$\Gamma : \begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3. \end{cases}$$

Condiţia de compatibilitate se reduce la $\lambda = \lambda^2\mu^3$, $\mu \neq 0$, şi conduce la ecuaţia conoidului cu plan director

$$\Sigma : z(y^3 - zx^3) = 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0.$$

■

Problema 8.2.9 *Să se determine ecuaţia suprafeţei care se obţine prin rotirea curbei*

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ x + z + 3 = 0, \end{cases}$$

în jurul dreptei $d : x = y = z$.

Rezolvare. Condiţia de compatibilitate a sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ x + z + 3 = 0 \\ x + y + z = \lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ x^2 + y^2 + z^2 = \mu^2, & \mu \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

este $3(\lambda+3)^2+5=\mu^2$. Ţinând cont că $\lambda=x+y+z$ şi $\mu=\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, găsim ecuaţia suprafeţei de rotaţie

$$\Sigma : 3(x+y+z+3)^2+5=x^2+y^2+z^2.$$

■

Problema 8.2.10 *Să se scrie ecuaţia conului de rotaţie în jurul axei Oz, a cărui generatoare face unghiuri de 45° cu axele de coordonate.*

Rezolvare. Descriem conul de rotaţie ca fiind obţinut prin rotirea curbei directoare (dreptei)

$$\Gamma : \begin{cases} y-z=0 \\ x-z=0, \end{cases}$$

în jurul axei de rotaţie

$$Oz : \frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}.$$

Condiţia de compatibilitate a sistemului

$$\begin{cases} y-z=0 \\ x-z=0 \\ z=\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R} \\ x^2+y^2+z^2=\mu^2, \quad \mu\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

este $3\lambda^2=\mu^2$. Deducem că ecuaţia conului căutat este $\Sigma : x^2+y^2=2z^2$. ■

Problema 8.2.11 *Să se determine ecuaţia **torului** obţinut prin rotirea cercului*

$$\Gamma : \begin{cases} (x-R)^2+y^2+z^2=r^2, \quad R>r>0, \\ y=0, \end{cases}$$

în jurul axei Oz.

Rezolvare. Condiţia de compatibilitate a sistemului

$$\begin{cases} (x-R)^2+y^2+z^2=r^2 \\ y=0 \\ z=\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R} \\ x^2+y^2+z^2=\mu^2, \quad \mu\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

este $(\pm\sqrt{\mu^2-\lambda^2}-R)^2+\lambda^2=r^2$. Rezultă ecuaţia carteziană a torului

$$\Sigma : x^2+y^2+z^2+R^2-r^2=2R\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Sigma : (x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2=4R^2(x^2+y^2).$$

■

Problema 8.2.12 *Să se determine ecuaţia suprafeţei obţinute prin rotirea* ***astroidei***

$$\Gamma : \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1 \\ z = 0, \end{cases}$$

în jurul axei Oy.

Rezolvare. Ecuaţiile cercurilor generatoare sunt

$$C_{\lambda\mu} : \begin{cases} y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ x^2 + y^2 + z^2 = \mu^2, \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Deducem că condiţia de sprijin pe astroida Γ este $\sqrt[3]{\mu^2 - \lambda^2} + \sqrt[3]{\lambda^2} = 1$. Obţinem ecuaţia suprafeţei căutate ca fiind

$$\Sigma : \sqrt[3]{x^2 + z^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1 \Leftrightarrow \Sigma : x^2 + z^2 = \left(1 - \sqrt[3]{y^2}\right)^3.$$

■

8.3 Probleme propuse

Problema 8.3.1 *Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice cu generatoarele paralele cu direcţia dată de vectorul $\overline{v} = \overline{i} - 2\overline{j} - \overline{k}$, având drept curbă directoare curba*

$$\Gamma : \begin{cases} y^2 - z^2 = 1 \\ x = 1. \end{cases}$$

R. $\Sigma : (2x + y - 2)^2 - (x + z - 1)^2 = 1.$

Problema 8.3.2 *Să se determine ecuaţia cilindrului ale cărui generatoare sunt paralele cu dreapta*

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

şi tangente la cuadrica $\Sigma : x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2x + 8y + 1 = 0$.

R. $\Sigma : (x-4y-2z+1)^2 - 3(x-2y-1)^2 - 12(y+z+1)^2 + 24y + 24z + 28 = 0.$

Problema 8.3.3 *Să se determine proiecţia ortogonală a curbei*

$$\Gamma : \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2z = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

pe planul $\pi : x - y + 2z - 1 = 0$.

R. Proiecţia căutată este curba plană

$$pr_{\pi}\Gamma : \begin{cases} 2(2x - z + 4)^2 + (x + 3y + z - 4)^2 - 6(-2x + z + 8) = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Problema 8.3.4 *Punctele paraboloidului hiperbolic $\Sigma : z = xy$ sunt proiectate pe planul xOy după direcţia dată de dreapta $d : x = y = z$. Să se găsească ecuaţiile acestei proiecţii şi să se reprezinte grafic.*

R. Proiecţia paraboloidului hiperbolic Σ pe planul xOy este reuniunea curbelor plane

$$\Gamma_k : \begin{cases} (x - z + k)(y - z + k) = k \\ z = 0, \end{cases}$$

unde $k \in \mathbb{R}$, adică avem $pr_{xOy}\Sigma = \cup_{k\in\mathbb{R}}\Gamma_k$.

Problema 8.3.5 *Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în originea sistemului de axe, având curba directoare*

$$\Gamma : \begin{cases} 3x^2 + y^2 - 2y - z = 0 \\ x + y + z - 5 = 0. \end{cases}$$

R. $\Sigma : 15x^2 + 5y^2 - (2y + z)(x + y + z) = 0$, unde $y \neq 0$, $z \neq 0$ şi $x + y + z \neq 0$.

Problema 8.3.6 *Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în punctul $V(0, 1, 1)$, ale cărei generatoare se sprijină pe curba*

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0 \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

R. $\Sigma : x^2 + 2(x - y + z)^2 + 3(x - 2y + 2z)^2 = 6(x - 2y + z + 1)^2$, unde $y \neq 1$, $z \neq 1$ şi $x - 2y + z + 1 \neq 0$.

Problema 8.3.7 *Să se determine ecuaţia conului cu vârful în origine, tangent sferei de ecuaţie $S : x^2 + y^2 + z^2 - 10y + 9 = 0$.*

R. $\Sigma : 9x^2 - 16y^2 + 9z^2 = 0$, unde $y \neq 0$ şi $z \neq 0$.

Problema 8.3.8 *Să se scrie ecuaţia suprafeţei generată de drepte paralele cu planul xOy, care se sprijină pe axa Oz şi pe dreapta*

$$d : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

R. $\Sigma : xz + 2yz - 3x = 0$, unde $x \neq 0$ şi $y \neq 0$.

Problema 8.3.9 *Să se scrie ecuaţia suprafeţei generată de drepte care se sprijină pe dreapta*

$$d : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

şi curba

$$\Gamma : \begin{cases} y - 2z = 1 \\ x^2 - 2z - 1 = 0, \end{cases}$$

rămânând paralele cu planul $\pi : x - 2y - z = 0$.

R. Σ : $[(x - 2y - z)(-3x - 2y + 4z) + 4x - 4y - 2z]^2 + 2(3x - 8y + z)[(x - 2y - z)(-2y + z) + 2x - 4y] - (3x - 8y + z)^2 = 0$, unde $x - z \neq 0$ şi $3x - 8y + z \neq 0$.

Problema 8.3.10 *Să se afle ecuaţia suprafeţei descrisă de o dreaptă mobilă care rămâne paralelă cu planul* $\pi : x + z = 0$ *şi se sprijină, atât pe axa* Oz, *cât şi pe cercul* $C : x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

R. $\Sigma : (x^2 + y^2)(x + z)^2 = x^2$, unde $x \neq 0$ şi $y \neq 0$.

Problema 8.3.11 *Să se scrie ecuaţia suprafeţei obţinută prin rotirea dreptei*

$$d : \frac{x - 7}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

în jurul axei Oz.

R. $\Sigma : x^2 + y^2 - 4z^2 - 49 = 0$.

Problema 8.3.12 *Să se determine suprafaţa de rotaţie obţinută prin rotirea curbei*

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 - 2y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ x + z + 3 = 0 \end{cases}$$

în jurul dreptei $d : x = y = z$.

R. $\Sigma : 3(x + y + z + 3)^3 + 5 = x^2 + y^2 + z^2$.

Problema 8.3.13 *Să se determine suprafaţa descrisă de curba*

$$\Gamma : \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 1 \\ x - y = 0, \end{cases}$$

când se roteşte în jurul axei Oz.

R. $\Sigma : 2\left(\pm\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}-2\right)^2+z^2=1.$

Problema 8.3.14 *Să se scrie ecuaţia suprafeţei generată de drepte variabile care se sprijină pe dreptele* $d_1 : x=0,\ y+1=0,\ d_2 : x=y-1=z$ *şi parabola* $\Gamma : y^2-2z=0,\ z=0$.

R. $\Sigma : -2xy+xz+yz+z=0$, unde $y+1\neq 0$ şi $x-z\neq 0$.

Problema 8.3.15 *Să se determine suprafaţa descrisă de o dreaptă variabilă care se sprijină pe trei muchii ale unui cub, necoplanare două câte două.*

R. Presupunând (fără a restrânge generalitatea) că avem cubul $OABCO'A'B'C'$, unde OA, OB şi OO' reprezintă direcţiile axelor de coordonate Ox, Oy şi Oz, şi, mai mult, presupunând că cubul are muchiile de lungime $l=1$, atunci dreptele necoplanare, pe care se sprijină dreapta mobilă, pot fi

$$OO' : \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases},\ BC : \begin{cases} y-1=0 \\ z=0 \end{cases} \text{ şi } A'C' : \begin{cases} x-1=0 \\ z-1=0 \end{cases}.$$

În acest context, suprafaţa căutată are ecuaţia $\Sigma : xy+xz-yz-x=0$, unde $y\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ şi $z\neq 0$. Prin reducere la forma canonică, se poate arăta că suprafaţa Σ este un hiperboloid cu o pânză. În concluzie, suprafaţa descrisă de o dreaptă variabilă care se sprijină pe muchiile OO', BC şi $A'C'$ ale cubului este hiperboloidul cu o pânză Σ, din care se scot punctele sale de intersecţie cu planele $y=0$, $y=1$ şi $z=0$.

Problema 8.3.16 *Să se determine cuadrica ce conţine curbele:*

$$\Gamma_1 : \begin{cases} y^2+z^2=2 \\ x=1, \end{cases} \quad \Gamma_2 : \begin{cases} y^2+z^2=3 \\ x=-2, \end{cases} \quad \Gamma_3 : \begin{cases} y^2+z^2=4 \\ x=-5. \end{cases}$$

R. $\Sigma : 3y^2+3z^2+x-7=0.$

Capitolul 9

Curbe plane

9.1 Elemente teoretice fundamentale

Fie spaţiul punctual euclidian al vectorilor liberi din plan $\mathcal{E}_2 = (E_2, V_2, \varphi)$ şi $\mathcal{R} = \{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ un reper ortonormat în acest spaţiu. Să presupunem că prin (x, y) desemnăm coordonatele punctelor din spaţiul afin $\mathcal{E}_2$.

Definiţia 9.1.1 *O funcţie diferenţiabilă* $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$, *având proprietatea*

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \ \forall \ t \in I,$$

*se numeşte **curbă plană parametrizată regulată**.*

Mulţimea de puncte $C = \operatorname{Im} c = \{P(x(t), y(t)) \in \mathcal{E}_2 \mid t \in I\}$ se numeşte *imaginea curbei plane c* sau, prin abuz de limbaj, se numeşte *curbă plană*. Argumentul t al curbei plane parametrizate $c(t)$ se numeşte *parametrul curbei* şi, adesea, în aplicaţii, joacă rolul timpului uzual. Vectorul liber $\dot{c}(t) = (x'(t), y'(t))$ se numeşte *vectorul viteză* sau *vectorul tangent* al curbei $C = \operatorname{Im} c$ în punctul P. Vectorul liber $\ddot{c}(t) = (x''(t), y''(t))$ se numeşte *vectorul acceleraţie* al curbei $C = \operatorname{Im} c$ în punctul P.

Definiţia 9.1.2 *Un punct* $P = c(t)$ *al unei curbe plane* $C = \operatorname{Im} c$, *nu neapărat regulată, se numeşte **punct critic** sau **singular** al curbei dacă* $\dot{c}(t) = (0, 0)$. *În caz contrar, punctul P se numeşte **punct regulat** al curbei.*

Propoziţia 9.1.1 *Într-un punct regulat* $P(x(t_0), y(t_0))$ *al unei curbe plane parametrizate* $C = \operatorname{Im} c$, *ecuaţia **dreptei tangente** la curbă are expresia*

$$T_P C : \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

iar ecuaţia ***dreptei normale*** *este descrisă de*

$$N_PC : (x - x(t_0))x'(t_0) + (y - y(t_0))y'(t_0) = 0.$$

Definiţia 9.1.3 *O mulţime de puncte $P(x, y)$ din spaţiul afin $\mathcal{E}_2$ ale căror coordonate verifică o relaţie de forma $C : f(x, y) = 0$, unde $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie diferenţiabilă cu proprietatea*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2 \neq 0, \ \forall \ (x, y) \in C,$$

se numeşte ***curbă plană regulată definită implicit.***

Definiţia 9.1.4 *Un punct $P(x_0, y_0)$ al unei curbe plane definite implicit $C : f(x, y) = 0$, nu neapărat regulată, se numeşte* ***punct critic*** *sau* ***singular*** *al curbei dacă $(grad\ f)(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) = (0, 0)$, unde $f_x(x_0, y_0) = (\partial f/\partial x)(x_0, y_0)$ şi $f_y(x_0, y_0) = (\partial f/\partial y)(x_0, y_0)$. În caz contrar, punctul P se numeşte* ***punct regulat*** *al curbei.*

Propoziţia 9.1.2 *Într-un punct regulat $P(x_0, y_0)$ al unei curbe plane definite implicit $C : f(x, y) = 0$, ecuaţia* ***dreptei tangente*** *la curbă are expresia*

$$T_PC : (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0) = 0$$

iar ecuaţia ***dreptei normale*** *este descrisă de*

$$N_PC : \frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)}.$$

Este foarte important de remarcat că, cu ajutorul Teoremei Funcţiilor Implicite din Analiza Matematică, se poate demonstra, cel puţin la nivel local, că orice curbă plană definită implicit poate fi reprezentată la nivel parametric (poate fi parametrizată) şi reciproc. Acest rezultat este însă unul calitativ deoarece, în situaţii concrete, conversia curbelor plane de la reprezentarea implicită la cea parametrică, şi viceversa, nu este întotdeauna o problemă facil de rezolvat.

Fie $c : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$, o curbă plană parametrizată şi fie $\dot{c}(t) = (x'(t), y'(t))$ câmpul viteză al curbei $C = \operatorname{Im} c$. În acest context, *lungimea curbei C* este independentă de parametrizare şi este determinată de formula

$$L(C) = \int_a^b ||\dot{c}(t)||dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Definiţia 9.1.5 *Parametrul $t \in I$ al unei curbe plane $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ se numeşte **parametru canonic** sau **natural** dacă $||\dot{c}(t)|| = 1$, $\forall\ t \in I$, (curba $C = \operatorname{Im} c$ are viteza egală cu unu). În această situaţie, prin convenţie, parametrul t se notează cu s.*

Fie $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$, o curbă plană regulată, nu neapărat parametrizată natural, şi $t_0 \in I$ un punct fixat în intervalul I. Să considerăm parametrizarea prin *lungimea de arc*, definită de relaţia

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\dot{c}(\sigma)||d\sigma,$$

şi să considerăm inversa acesteia $t = t(s)$ (se poate demonstra că funcţia $t \to s(t)$ este întotdeauna inversabilă).

Teorema 9.1.3 *Curba plană $\widetilde{c} : [0, L(C)] \to \mathbb{R}^2$, definită prin*

$$\widetilde{c}(s) = c(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s))),$$

este parametrizată canonic (i. e. $||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = 1$, $\forall\ s \in [0, L(C)]$).

Corolarul 9.1.4 *Orice curbă plană regulată poate fi reparametrizată canonic (natural) prin lungimea de arc.*

Rezultatele precedente au un puternic caracter calitativ deoarece, în practică, pe curbe concrete, nu este întotdeauna uşor de construit efectiv reparametrizarea canonică prin lungimea de arc.

Dacă $c(s) = (x(s), y(s))$ este o curbă plană parametrizată canonic, atunci vectorul $T(s) = \dot{c}(s) = (x'(s), y'(s))$ se numeşte *versorul tangent* iar vectorul $N(s) = (-y'(s), x'(s))$, obţinut prin rotirea lui $T(s)$ cu un unghi de $\pi/2$ în sens trigonometric, se numeşte *versorul normal* în punctul $P = c(s)$ al curbei $C = \operatorname{Im} c$. Reperul ortonormat mobil $\{T(s), N(s)\}$ se numeşte *reperul Frénet* al curbei plane de viteză unu $C = \operatorname{Im} c$.

Teorema 9.1.5 (Formulele lui Frénet pentru curbe de viteză unu) *Variaţia versorilor $T(s)$ şi $N(s)$ ai reperului Frénet al curbei plane $c(s) = (x(s), y(s))$ parametrizate canonic este determinată de formulele*

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} = K(s)N(s) \\ \dfrac{dN}{ds} = -K(s)T(s), \end{cases}$$

*unde $K(s) = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)$ reprezintă **curbura** curbei $C = \operatorname{Im} c$ în punctul curent $P = c(s)$.*

Observaţia 9.1.6 *Din punct de vedere geometric, curbura $K(s)$ măsoară gradul de încovoiere al curbei în vecinătatea punctului $P = c(s)$, prin măsurarea variaţiei direcţiei versorului tangent $T(s)$ în imediata apropiere a punctului P.*

Teorema 9.1.7 *Pentru o curbă plană parametrizată arbitrar, definită de $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$, curbura curbei $C = \operatorname{Im} c$ în punctul $P = c(t)$ este determinată de formula*

$$K(P) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}}.$$

Teorema 9.1.8 *Dacă $c(t) = (x(t), y(t))$ este o curbă plană parametrizată arbitrar, atunci reperul lui Frénet $\{T(t), N(t)\}$ al curbei plane $C = \operatorname{Im} c$ este definit de vectorii*

$$T(t) = \frac{1}{||\dot{c}(t)||}\dot{c}(t), \;\; N(t) = \frac{1}{||\dot{c}(t)||}\left(-y'(t), x'(t)\right).$$

Teorema 9.1.9 (Formulele lui Frénet pentru curbe plane) *Variaţia versorilor $T(t)$, şi $N(t)$ ai reperului Frénet al curbei plane $c(t) = (x(t), y(t))$ parametrizate arbitrar este determinată de formulele*

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = K(t)v(t)N(t) \\ \dfrac{dN}{dt} = -K(t)v(t)T(t), \end{cases}$$

*unde $v(t) = ||\dot{c}(t)||$ reprezintă **viteza** curbei plane $C = \operatorname{Im} c$ în punctul curent $P = c(t)$.*

Fie $C_1 = \operatorname{Im} c_1$ şi $C_2 = \operatorname{Im} c_2$ două curbe plane parametrizate şi fie $P \in C_1 \cap C_2$ un punct comun al lor, caracterizat prin $P = c_1(t_0) = c_2(t_0)$.

Definiţia 9.1.6 *Punctul $P \in C_1 \cap C_2$ se numeşte **contact de ordin** $m \in \mathbb{N}$ dacă sunt adevărate relaţiile:*

$$\begin{cases} \dfrac{d^k c_1}{dt^k}(t_0) = \dfrac{d^k c_2}{dt^k}(t_0), \qquad \forall\; k = \overline{0, m}, \\ \dfrac{d^{m+1} c_1}{dt^{m+1}}(t_0) \neq \dfrac{d^{m+1} c_2}{dt^{m+1}}(t_0). \end{cases}$$

Să considerăm $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (x(t), y(t))$, o curbă plană parametrizată şi $C_2 : f(x, y) = 0$ o curbă plană definită implicit. Să presupunem că $P \in C_1 \cap C_2$ este un punct comun al celor două curbe, definit prin $c_1(t_0) = P(x_0, y_0)$.

Teorema 9.1.10 *Punctul $P \in C_1 \cap C_2$ este un contact de ordin $m \in \mathbb{N}$ dacă*

$$\begin{cases} \varphi^{(k)}(t_0) = 0, & \forall\, k = \overline{0, m}, \\ \varphi^{(m+1)}(t_0) \neq 0, \end{cases}$$

unde $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ se numeşte ***funcţia de contact*** *a curbelor plane C_1 şi C_2.*

Fie $C_\alpha : f(x, y, \alpha) = 0$, $\alpha \in I \subset \mathbb{R}$, o familie de curbe plane regulate, definite implicit.

Definiţia 9.1.7 *O curbă plană $\mathcal{C}$ se numeşte* ***înfăşurătoarea familiei de curbe*** *$\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$, dacă are proprietatea că pentru orice punct $P \in \mathcal{C}$ există o curbă C_{α_0} din familia $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$, astfel încât $\mathcal{C}$ şi C_{α_0} au în punctul P un contact de ordin unu (sunt tangente în P). Punctul P se numeşte* ***punct caracteristic*** *al curbei C_{α_0}.*

Teorema 9.1.11 *Dacă înfăşurătoarea $\mathcal{C}$ există şi toate punctele caracteristice ale curbelor $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sunt regulate, atunci ecuaţia înfăşurătoarei se obţine prin eliminarea parametrului α din sistemul*

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(c, y, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Fie $C = \operatorname{Im} c$, $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, o curbă plană parametrizată.

Definiţia 9.1.8 *Înfăşurătoarea $\mathcal{E}$ a familiei de normale $\{N_{c(t)}C\}_{t \in I}$ se numeşte* ***evoluta*** *curbei C. Dacă $\mathcal{E}$ este evoluta curbei C, atunci curba C se numeşte* ***evolventă*** *a curbei $\mathcal{E}$.*

Teorema 9.1.12 *Evoluta curbei parametrizate C este reprezentată de curba parametrizată $\mathcal{E} = \operatorname{Im} E$, $E(t) = (X(t), Y(t))$, unde*

$$X(t) = x(t) - y'(t) \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'},$$

$$Y(t) = y(t) + x'(t) \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}.$$

Fie $C = \operatorname{Im} c$, $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, o curbă plană parametrizată şi $P = c(t)$ un punct arbitrar al curbei.

Definiţia 9.1.9 *Un cerc $\mathcal{C}$ din plan se numeşte* ***cerc osculator*** *în P la curba C dacă cercul $\mathcal{C}$ şi curba C au în punctul P un contact de ordin doi.*

Observaţia 9.1.13 *Din punct de vedere geometric, local, cercul osculator $\mathcal{C}$ realizează o aproximare printr-un arc de cerc a arcului de curbă C dintr-o vecinătate a punctului P.*

Teorema 9.1.14 *Ecuaţia cercului osculator în P la curba C este dată de*

$$\mathcal{C} : (x - X(t))^2 + (y - Y(t))^2 = (R(t))^2$$

unde $(X(t), Y(t))$ sunt coordonatele centrului cercului osculator într-un punct arbitrar al curbei iar raza cercului osculator este $R(t) = 1/|K(t)|$ şi se numeşte ***raza de curbură*** *a curbei C.*

Este evident faptul că locul geometric descris de centrele cercurilor osculatoare corespunzătoare tuturor punctelor curbei C reprezintă exact evoluta $\mathcal{E}$ a curbei C.

9.2 Probleme rezolvate

Problema 9.2.1 *Să se scrie ecuaţiile implicite ale următoarelor curbe plane parametrizate:*

i) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

ii) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

iii) $C_3 = \operatorname{Im} c_3$, $c_3(t) = (\cosh t, \sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. i) Deoarece $x(t) = \cos t$ şi $y(t) = \sin t$, rezultă că avem $C_1 : (x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$. Cu alte cuvinte, curba C_1 reprezintă cercul centrat în originea $O(0,0)$ şi de rază $r = 1$ descris de ecuaţia carteziană $x^2 + y^2 = 1$.

ii) Avem $x(t) = \cos 2t$ şi $y(t) = \sin 2t$, $t \in [0, 2\pi]$. Prin analogie cu punctul anterior, rezultă că curba C_2 reprezintă de asemenea cercul centrat în originea $O(0,0)$ şi de rază $r = 1$ descris de ecuaţia carteziană $x^2 + y^2 = 1$. Trebuie remarcat însă faptul că "diferenţa" dintre cele două cercuri de la punctele i) şi ii) constă în faptul că, în primul caz cercul este "înfăşurat" o singură dată, in timp ce în cel de-al doilea caz este "înfăşurat" de două

ori. Cu alte cuvinte, din punct de vedere parametric, deşi reprezintă aceeaşi imagine, avem de-a face cu două "cercuri distincte".

iii) Din $x(t) = \cosh t$ şi $y(t) = \sinh t$ deducem că $(y(t))^2 - (x(t))^2 = 1$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$. În concluzie, curba C_3 este hiperbola echilateră $C_3 : y^2 - x^2 = 1$, $x > 0$. ■

Problema 9.2.2 *Să se scrie ecuaţiile parametrice ale următoarelor curbe plane definite implicit:*

i) $C_1 : y = \ln x + 1$;

ii) $C_2 : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$;

iii) $C_3 : x^3 + 3x^2y - y^3 + 9 = 0$.

Rezolvare. i) Luând $x = t$, $t > 0$, deducem că $y = \ln t + 1$. În concluzie, avem $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, unde $c_1(t) = (t, \ln t + 1)$.

ii) Luând $x = 2\cos t$ şi $y = 3\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, obţinem parametrizarea elipsei C_2. Cu alte cuvinte, avem curba plană parametrizată $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, unde $c_2(t) = (2\cos t, 3\sin t)$.

iii) Căutăm un parametru $t \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $y = tx$. În aceste condiţii, obţinem relaţia $(1 + 3t - t^3)x^3 + 9 = 0$, adică

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{t^3 - 3t - 1}}, \quad y = t\sqrt[3]{\frac{9}{t^3 - 3t - 1}}.$$

Prin urmare, găsim $C_3 = \operatorname{Im} c_3$, unde

$$c_3(t) = \left(\sqrt[3]{\frac{9}{t^3 - 3t - 1}}, t\sqrt[3]{\frac{9}{t^3 - 3t - 1}}\right),$$

unde $t^3 - 3t - 1 \neq 0$. ■

Problema 9.2.3 *Să se determine punctele singulare ale următoarelor curbe plane:*

i) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi)$;

ii) $C_2 : y^2 - x(x-1)^2 = 0$.

Rezolvare. i) Punctele singulare ale curbei (astroidei) C_1 se obţin rezolvând ecuaţia $\dot{c}_1(t) = (-3a\cos^2 t \sin t, 3a\sin^2 t \cos t) = (0,0)$. În concluzie, astroida C_1 are patru puncte singulare:

$$P(t=0) = P(a,0), \quad Q\left(t = \frac{\pi}{2}\right) = Q(0,a),$$

$$R(t=\pi) = R(-a,0) \quad \text{şi} \quad S\left(t = \frac{3\pi}{2}\right) = S(0,-a).$$

ii) Curba C_2 este definită de funcţia $f(x,y) = y^2 - x(x-1)^2$, al cărei gradient este

$$(grad\ f)(x,y) = (-3x^2 + 4x - 1, 2y).$$

Rezolvând sistemul $(grad\ f)(x,y) = (0,0)$, deducem că curba C_2 are două puncte singulare:

$$P\left(\frac{1}{3}, 0\right) \quad \text{şi} \quad Q(1,0).$$

■

Problema 9.2.4 *Să se scrie ecuaţiile tangentelor şi normalelor la curbele C_1 şi C_2 în punctele lor de intersecţie cu axa Ox:*

i) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = \left(\dfrac{3}{t^2 - 2t}, \dfrac{t^2 - 3}{t}\right)$, $t \in \mathbb{R} \backslash \{0, 2\}$;

ii) $C_2 : x^2 - xy^2 + 2x + y - 3 = 0$.

Rezolvare. i) Punctele de intersecţie cu axa Ox se obţin când $y(t) = 0$. Deducem că avem două puncte de intersecţie $P(t = -\sqrt{3})$ şi $Q(t = \sqrt{3})$. Vectorul viteză al curbei C_1 este

$$\dot{c}_1(t) = \left(-\frac{6(t-1)}{(t^2 - 2t)^2}, 1 + \frac{3}{t^2}\right).$$

Prin urmare, avem $\dot{c}_1(-\sqrt{3}) = (2(3\sqrt{3} - 5), 2)$ şi $\dot{c}_1(\sqrt{3}) = (-2(3\sqrt{3} + 5), 2)$. Rezultă că ecuaţiile tangentelor şi normalelor în punctele P şi Q sunt:

$$T_P C_1 : \frac{x - \dfrac{3}{3 + 2\sqrt{3}}}{3\sqrt{3} - 5} = \frac{y}{1}, \quad N_P C_1 : \left(x - \frac{3}{3 + 2\sqrt{3}}\right)(3\sqrt{3} - 5) + y = 0,$$

$$T_Q C_1 : \frac{x - \dfrac{3}{3 - 2\sqrt{3}}}{-3\sqrt{3} - 5} = \frac{y}{1}, \quad N_Q C_1 : -\left(x - \frac{3}{3 - 2\sqrt{3}}\right)(3\sqrt{3} + 5) + y = 0.$$

ii) Punctele de intersecţie cu axa Ox se obţin pentru $y = 0$. Cu alte cuvinte, avem ecuaţia $x^2 + 2x - 3 = 0$ şi rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. Obţinem punctele de intersecţie $P(1, 0)$ şi $Q(-3, 0)$.

Gradientul funcţiei $f(x, y) = x^2 - xy^2 + 2x + y - 3$ este dat de

$$(grad\ f)(x, y) = (2x - y^2 + 2, -2xy + 1).$$

În particular, obţinem $(grad\ f)(P) = (4, 1)$ şi $(grad\ f)(Q) = (-4, 1)$. Prin urmare, ecuaţiile tangentelor şi normalelor în punctele P şi Q sunt:

$$T_PC_2 : 4x + y - 4 = 0, \qquad N_PC_2 : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} \Leftrightarrow x - 4y - 1 = 0,$$

$$T_QC_2 : -4x + y - 12 = 0, \quad N_QC_2 : \frac{x+3}{-4} = \frac{y}{1} \Leftrightarrow x + 4y + 3 = 0.$$

■

Problema 9.2.5 *Să se calculeze lungimile următoarelor curbe plane:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, unde

$$c_1(t) = (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t);$$

b) $C_2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, unde $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ şi $R > 0$.

Rezolvare. a) Vectorul viteză al curbei C_1 este

$$\dot{c}_1(t) = (-2\sin t + 2\sin 2t, 2\cos t - 2\cos 2t)$$

iar norma vectorului viteză este $||\dot{c}_1(t)|| = 4\sin(t/2)$. În concluzie, avem

$$L(C_1) = \int_0^{2\pi} 4\sin\frac{t}{2}dt = -8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 16.$$

b) Cercul C_2 poate fi parametrizat prin

$$x(t) = x_0 + R\cos t, \quad y(t) = y_0 + R\sin t,$$

unde $t \in [0, 2\pi]$. Rezultă că avem $x'(t) = -R\sin t$ şi $y'(t) = R\cos t$. Prin urmare, lungimea curbei C_2 este

$$L(C_2) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}dt = 2\pi R.$$

■

Problema 9.2.6 *Să se arate că următoarele curbe nu sunt parametrizate canonic şi, în consecinţă, să se reparametrizeze canonic prin lungimea de arc:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $R > 0$, $R \neq 1$, $t \in [0, 2\pi]$;

b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2(t) = (e^{-t}(\cos t - \sin t), e^{-t}(\cos t + \sin t))$, $t \in [0, a]$, $a > 0$.

Rezolvare. a) Avem $\dot{c}_1(t) = (-R\sin t, R\cos t)$, ceea ce implică $||\dot{c}_1(t)|| = R \neq 1$. Construim parametrul canonic prin lungimea de arc

$$s = \int_0^t ||\dot{c}_1(\sigma)|| d\sigma = \int_0^t R d\sigma = Rt.$$

Scriind t în funcţie de s, găsim $t = s/R$. Cu alte cuvinte, avem $C_1 = \operatorname{Im} \widetilde{c}_1$, $\widetilde{c}_1 : [0, 2\pi R] \to \mathbb{R}^2$, unde

$$\widetilde{c}_1(s) = \left(R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R}\right).$$

b) Vectorul viteză al curbei C_2 este $\dot{c}_2(t) = -2e^{-t}(\cos t, \sin t)$. Rezultă că $||\dot{c}_2(t)|| = 2e^{-t}$, adică avem

$$s = \int_0^t ||\dot{c}_2(\sigma)|| d\sigma = \int_0^t 2e^{-\sigma} d\sigma = -2e^{-t} + 2.$$

Inversând, găsim $t = \ln(2/(2-s))$, $s < 2$. Prin urmare, vom obţine parametrizarea canonică prin lungimea de arc $C_2 = \operatorname{Im} \widetilde{c}_2$, $\widetilde{c}_2 : [0, 2 - 2e^{-a}] \to \mathbb{R}^2$, unde

$$\widetilde{c}_2(s) = \frac{2-s}{2}\left(\cos\ln\frac{2}{2-s} - \sin\ln\frac{2}{2-s}, \cos\ln\frac{2}{2-s} + \sin\ln\frac{2}{2-s}\right).$$

■

Problema 9.2.7 *Să se determine curburile următoarelor curbe plane:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (3t^2, 3t - t^3)$ *în punctul* $P(t = 1)$;

b) $C_2 : \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{3}\right)^{2/3} = 1$ *în punctul* $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$;

c) $C_3 : y = x^3 - 4x^2 - x^4$ *în punctul* $P(0, 0)$;

Rezolvare. a) Avem $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 3t - t^3$ şi, prin derivare, deducem că $x'(t) = 6t$, $x''(t) = 6$ şi $y'(t) = 3 - 3t^2$, $y''(t) = -6t$. Aplicând formula curburii de la curbele plane parametrizate arbitrar, găsim

$$K(c(t)) = \frac{-2}{3(t^2+1)^2}.$$

Prin urmare, avem $K(P) = -1/6$.

b) Curba C_2 este o astroidă ce poate fi parametrizată prin

$$x(t) = 2\cos^3 t, \quad y(t) = 3\sin^3 t,$$

unde $t \in [0, 2\pi]\backslash\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$. Punctul $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ este corespunzător lui $t = \pi/4$. Cu ajutorul derivării funcţiilor $x(t)$ şi $y(t)$, precum şi al formulei curburii $K(c(t))$, vom găsi

$$K(P) = (c(\pi/4)) = -24\sqrt{2}/(13\sqrt{117}).$$

c) Parametrizăm curba C_3, luând $x(t) = t$ şi $y(t) = t^3 - 4t^2 - t^4$, $t \in \mathbb{R}$. În urma calculelor, găsim $K(P) = K(c(0)) = -8$. ■

Problema 9.2.8 *Să se arate că o curbă plană este un cerc dacă şi numai dacă curbura este constantă nenulă.*

Rezolvare. " $\Rightarrow$ " Fie cercul $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, $R > 0$. Cercul C poate fi parametrizat ca $C = \operatorname{Im} c$, $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, unde

$$x(t) = x_0 + R\cos t, \quad y(t) = y_0 + R\sin t.$$

Deducem că $x'(t) = -R\sin t$, $x''(t) = -R\cos t$ şi $y'(t) = R\cos t$, $y''(t) = -R\sin t$. Prin calcul, găsim $K(c(t)) = 1/R$, $\forall\, t \in [0, 2\pi]$.

" $\Leftarrow$ " Fie $C = \operatorname{Im} c$, $c(s) = (x(s), y(s))$, $s \in [0, L(C)]$, o curbă plană parametrizată canonic (i. e., $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$), având curbura constantă $K(c(s)) = 1/R$, unde $R =$ *constantă nenulă*. Această presupunere asupra parametrizării curbei nu restrânge generalitatea problemei, deoarece orice curbă poate fi reparametrizată canonic, prin lungimea de arc. Deoarece curbura este constantă, deducem că avem

$$x'y'' - x''y' = \frac{1}{R}, \quad \forall\, s \in [0, L(C)].$$

Mai mult, derivând relaţia $x'^2 + y'^2 = 1$, găsim

$$x'x'' + y'y'' = 0, \quad \forall\, s \in [0, L(C)].$$

Ecuaţiile precedente implică relaţiile

$$x'' = -\frac{1}{R}y' \quad \Leftrightarrow \quad x' = -\frac{1}{R}y + x_0 \quad \Leftrightarrow \quad Rx' = -y + Rx_0,$$

$$y'' = \frac{1}{R}x' \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{1}{R}x + y_0 \quad \Leftrightarrow \quad Ry' = x + Ry_0,$$

unde x_0, y_0 sunt numere reale arbitrare. În concluzie, din relaţia $x'^2 + y'^2 = 1$, deducem că x şi y verifică ecuaţia cercului

$$C : (x + Ry_0)^2 + (y - Rx_0)^2 = R^2.$$

■

Problema 9.2.9 *Să se arate că curbele* $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, *unde*

$$c_1(t) = (\cos t, \sin^3 t)$$

şi $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, *unde*

$$c_2(t) = \left(\sin t, \frac{1}{2}\cos t\right)$$

au două puncte comune P *şi* Q*. Să se determine ordinele de contact ale celor două curbe în punctele* P *şi* Q*.*

Rezolvare. Coordonatele punctelor comune celor două curbe se obţin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \cos t = \sin t \\ \sin^3 t = \dfrac{1}{2}\cos t, \end{cases}$$

unde $t \in [0, 2\pi]$. Găsim punctele de intersecţie $P(t = \pi/4)$ şi $Q(t = 5\pi/4)$. Deoarece vectorii viteză într-un punct arbitrar al fiecăreia dintre cele două curbe sunt exprimaţi de

$$\dot{c}_1(t) = (-\sin t, 3\sin^2 t \cos t),$$
$$\dot{c}_2(t) = \left(\cos t, -\frac{1}{2}\sin t\right),$$

deducem că $\dot{c}_1(\pi/4) \neq \dot{c}_2(\pi/4)$ şi $\dot{c}_1(5\pi/4) \neq \dot{c}_2(5\pi/4)$. În concluzie, punctele P şi Q sunt puncte de contact de ordin 0. ■

Problema 9.2.10 *Să se arate că parabola* $C_1 : \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ *şi cercul* $C_2 : (x-12)^2 + (y-12)^2 = 128$ *au în punctul* $P(4,4)$ *un contact de ordin* 3.

Rezolvare. Parametrizăm parabola C_1, luând $x(t) = t^2$ şi $y(t) = (4-t)^2$, $t \geq 0$. Prin urmare, vom avea funcţia de contact a curbelor C_1 şi C_2, definită de

$$\varphi(t) = (t^2 - 12)^2 + (t^2 - 8t + 4)^2 - 128.$$

Deoarece punctul $P(4,4)$ se obţine pentru valoarea $t = 2$, se verifică uşor că avem $\varphi(2) = \varphi'(2) = \varphi''(2) = \varphi'''(2) = 0$ şi $\varphi^{(4)}(2) = 0$. Rezultă ceea ce trebuia demonstrat. ■

Problema 9.2.11 *Să se determine înfăşurătoarele următoarelor familii de curbe plane şi, acolo unde este cazul, locul geometric al punctelor singulare ale acestora:*

a) $C_\alpha : x^2 + y^2 - \alpha^2 = 0$, $\alpha > 0$;

b) $C_a : a^3(x-1) + 3ax - 2y = 0$, $a \in \mathbb{R}$;

c) $C_\lambda : (y-\lambda)^2 - (x-\lambda)^3 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. a) Considerăm sistemul de ecuaţii obţinut prin derivare în raport cu α, şi anume

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \alpha^2 = 0 \\ -2\alpha = 0. \end{cases}$$

Rezultă $\alpha = x = y = 0$. Deoarece originea $O(0,0)$ nu aparţine nici unei curbe din familia C_α, deducem că nu există înfăşurătoarea familiei de curbe plane C_α.

b) Fie sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} a^3(x-1) + 3ax - 2y = 0 \\ 3a^2(x-1) + 3x = 0, \end{cases}$$

din care găsim parametrul $a = \pm\sqrt{x/(1-x)}$. Prin urmare, eliminând parametrul a prin înlocuirea lui în prima ecuaţie, găsim ecuaţia înfăşurătoarei

$$\mathcal{I} : y^2(1-x) - x^3 = 0, \quad x \in [0,1).$$

c) Pentru a rezolva sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} (y-\lambda)^2 - (x-\lambda)^3 = 0 \\ -2(y-\lambda) + 3(x-\lambda)^2 = 0, \end{cases}$$

considerăm următoarele situaţii:

(i) Dacă $y \neq \lambda$, avem $x - \lambda = (y - \lambda)^{2/3}$ şi, mai mult, $\lambda = y - 8/27$. Înlocuind în a doua ecuaţie, găsim că ecuaţia înfăşurătoarei familiei de curbe C_λ este reuniunea de drepte paralele cu prima bisectoare, descrisă de ecuaţia carteziană

$$\mathcal{I} : \left(x - y + \frac{20}{27}\right)\left(x - y - \frac{4}{27}\right) = 0;$$

(ii) Dacă $y = \lambda$, deducem că $x = \lambda$. Punctele $P(\lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sunt puncte singulare ale familiei de curbe C_λ. Prin urmare, locul geometric descris de acestea este prima bisectoare a sistemului de axe. Aceasta se exclude din înfăşurătoarea familiei de curbe C_λ. ■

Problema 9.2.12 *Să se determine evolutele curbelor:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t))$, $t \in \mathbb{R}$, $R > 0$ *(cicloida);*

b) $C_2 : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0$ *(elipsa).*

Rezolvare. a) Avem $x(t) = R(t - \sin t)$, $x'(t) = R(1 - \cos t)$ şi $x''(t) = R \sin t$. Mai mult, din relaţia $y(t) = R(1 - \cos t)$ obţinem prin derivare $y'(t) = R \sin t$ şi $y''(t) = R \cos t$. Aplicând formulele ce determină coordonatele cercului osculator, găsim că evoluta curbei C_1 este curba parametrizată $\mathcal{E}_1 = \operatorname{Im} E_1$, $E_1(t) = (X_1(t), Y_1(t))$, unde

$$X_1(t) = R(t + \sin t), \quad Y_1(t) = -R(1 - \cos t).$$

b) Elipsa C_2 poate fi parametrizată prin $x(t) = 2 \sin t$ şi $y(t) = 3 \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$. Prin derivări şi aplicarea formulelor ce determină coordonatele cercului osculator, găsim că evoluta curbei (elipsei) C_2 este curba parametrizată $\mathcal{E}_2 = \operatorname{Im} E_2$, $E_2(t) = (X_2(t), Y_2(t))$, unde

$$X_2(t) = -\frac{5 \sin^3 t}{2}, \quad Y_2(t) = \frac{5 \cos^3 t}{3}.$$

La nivel de coordonate carteziene, evoluta $\mathcal{E}_2$ este astroida descrisă de ecuaţia

$$\mathcal{E}_2 : \sqrt[3]{\frac{4x^2}{25}} + \sqrt[3]{\frac{9y^2}{25}} = 1.$$

■

Problema 9.2.13 *Să se determine coordonatele centrului şi raza cercului osculator într-un punct curent al curbei:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t)$, $t \in \mathbb{R}$;

b) $C_2 : y = e^{x/2} + e^{-x/2}$ *(lănţişorul).*

Rezolvare. a) Avem $x(t) = \cos t + t\sin t$ şi $y(t) = \sin t - t\cos t$. Raza cercului osculator coincide cu raza de curbură $R_1(t) = |t|$, obţinută prin calcul. Tot prin calcul, deducem că coordonatele centrului cercului osculator sunt

$$X_1(t) = \cos t, \quad Y_1(t) = \sin t.$$

b) Parametrizarea lănţişorului C_2 se realizează punând $x(t) = t$ şi $y(t) = e^{t/2} + e^{-t/2}$, unde $t \in \mathbb{R}$. În urma calculelor, găsim raza de curbură

$$R_2(t) = \frac{(e^{t/2} + e^{-t/2})^2}{2}$$

şi coordonatele centrului cercului osculator

$$X_2(t) = t - \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad Y_2(t) = 2(e^{t/2} + e^{-t/2}).$$

■

9.3 Probleme propuse

Problema 9.3.1 *Să se scrie ecuaţiile implicite ale următoarelor curbe plane parametrizate:*

i) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (t, \ln\cos t)$, $t \in \left(\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, *(lănţişorul de egală rezistenţă);*

ii) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2(t) = (a\cos^3 2t, b\sin^3 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$, *(astroida);*

iii) $C_3 = \operatorname{Im} c_3$, $c_3(t) = (2a\ln\sin t - 2a\sin^2 t, a\sin 2t)$, $t \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $a > 0$.

R. i) $C_1 : y = \ln\cos x$, $x \in \left(\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

ii) $C_2 : \sqrt[3]{\frac{x^2}{a^2}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{b^2}} = 1$;

iii) Avem $C_3 = C_3' \cup C_3'' \cup C_3'''$, curbele C_3', C_3'' şi C_3''' sunt definite implicit prin

$$C_3' : x = 2a \ln\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a+y}{a}} + \sqrt{\frac{a-y}{a}}\right)\right] - \frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{a+y}{a}} + \sqrt{\frac{a-y}{a}}\right)^2,$$

unde $y \in [-a, 0) \cup (0, a]$,

$$C_3'' : x = 2a \ln\left[\frac{1}{2}\left(-\sqrt{\frac{a+y}{a}} + \sqrt{\frac{a-y}{a}}\right)\right] - \frac{a}{2}\left(-\sqrt{\frac{a+y}{a}} + \sqrt{\frac{a-y}{a}}\right)^2,$$

unde $y \in [-a, 0)$, şi

$$C_3''' : x = 2a \ln\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a+y}{a}} - \sqrt{\frac{a-y}{a}}\right)\right] - \frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{a+y}{a}} - \sqrt{\frac{a-y}{a}}\right)^2,$$

unde $y \in (0, a]$.

Problema 9.3.2 *Să se scrie ecuaţiile parametrice ale următoarelor curbe plane definite implicit:*

i) $C_1 : y^2 = e^x + 1$;

ii) $C_2 : x^3 - y^3 + 2xy = 0$;

iii) $C_3 : (x^2 + y^2)x - 2ay^2 = 0,\ a > 0,$ *(cisoida lui Diocles).*

R. i) $C_1 = \operatorname{Im} c_1^1 \cup \operatorname{Im} c_1^2$, unde $c_1^{1,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c_1^{1,2}(t) = \left(t, \pm\sqrt{e^t + 1}\right)$;

ii) $C_2 \backslash \{O(0,0)\} = \operatorname{Im} c_2$, unde $c_2 : \mathbb{R} \backslash \{0, 1\} \to \mathbb{R}^2$,

$$c_2(t) = \left(\frac{2t}{t^3 - 1}, \frac{2t^2}{t^3 - 1}\right);$$

iii) $C_3 \backslash \{O(0,0)\} = \operatorname{Im} c_3$, unde $c_3 : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2$,

$$c_3(t) = \left(\frac{2at^2}{t^2 + 1}, \frac{2at^3}{t^2 + 1}\right).$$

Problema 9.3.3 *Să se determine punctele singulare ale următoarelor curbe plane:*

i) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (3\cos t - \cos 3t, 3\sin t - \sin 3t)$, $t \in [0, 2\pi)$;

ii) $C_2 : x^4 - 2ax^2y - axy^2 + a^2y^2 = 0$, $a > 0$;

iii) $C_3 : (y - a)(y - a + 1) + (x - a)^2 = 0$, $a > 0$;

iv) $C_4 : y^2x + ay^2 + x^3 - ax^2 = 0$, $a > 0$.

R. i) $A(2, 0)$ şi $B(-2, 0)$; ii) $A(0, 0)$ şi $B\left(\frac{5a}{4}, -\frac{25a}{4}\right)$; iii) $A\left(a, \frac{2a-1}{2}\right)$; iv) $A(0, 0)$ şi $B\left(\frac{2a}{3}, 0\right)$.

Problema 9.3.4 *Să se scrie ecuaţiile tangentelor şi normalelor la curbele C_1 şi C_2 în punctele lor de intersecţie cu axele Ox şi Oy:*

i) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = \left(\frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right)$, $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $a, b > 0$;

ii) $C_2 : (y - 1)^3 + 27(x - 2)^2 = 0$.

R. i) $P(a, 0)$, $T_PC_1 : x - a = 0$, $N_PC_1 : y = 0$;

$Q(-a, 0)$, $T_QC_1 : x + a = 0$, $N_QC_1 : y = 0$.

ii) $P(0, 1 - 3\sqrt[3]{4})$, $T_PC_2 : \sqrt[3]{4}x - y + 1 - 3\sqrt[3]{4} = 0$, $N_PC_2 : \sqrt[3]{2}x + 2y - 2 + 6\sqrt[3]{4} = 0$;

$Q\left(\frac{18+\sqrt{3}}{9}, 0\right)$, $T_QC_2 : 6\sqrt{3}x + 3y - 12\sqrt{3} - 2 = 0$, $N_QC_2 : 9x - 18\sqrt{3}y - \sqrt{3} - 18 = 0$;

$R\left(\frac{18-\sqrt{3}}{9}, 0\right)$, $T_RC_2 : 6\sqrt{3}x - 3y - 12\sqrt{3} + 2 = 0$, $N_RC_2 : 9x + 18\sqrt{3}y + \sqrt{3} - 18 = 0$.

Problema 9.3.5 *Să se calculeze lungimile următoarelor curbe plane:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, unde

$$c_1(t) = \left(4a\cos^3\frac{t}{2}, 4a\sin^3\frac{t}{2}\right), \ a > 0;$$

b) $C_2 : (x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0$, $a > 0$, *(lemniscata lui Bernoulli)*.

R. a) $L(C_1) = 12a$. b) Căutând o parametrizare de forma $y = tx$, găsim că lemniscata lui Bernoulli poate fi parametrizată ca $C_2 \backslash \{O(0,0)\} = \operatorname{Im} c_2^1 \cup \operatorname{Im} c_2^2$, unde $c_2^{1,2} : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$,

$$c_2^{1,2}(t) = \left(\pm a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}, \pm a\sqrt{2} \cdot \frac{t\sqrt{1-t^2}}{1+t^2} \right).$$

Deoarece curbele $C_2^1 = \operatorname{Im} c_2^1$ şi $C_2^2 = \operatorname{Im} c_2^2$ sunt simetrice faţă de origine, rezultă că avem

$$\begin{aligned} L(C_2) &= 2L(C_2^1) = 4a\sqrt{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt = \\ &= 4a\sqrt{2} \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{4n+1} \right). \end{aligned}$$

Problema 9.3.6 *Să se arate că următoarele curbe nu sunt parametrizate canonic şi, în consecinţă, să se reparametrizeze canonic prin lungimea de arc:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi)$;

b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2 : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2$, unde

$$c_2(t) = \left(\int \frac{\sin t}{t} dt, \int \frac{\cos t}{t} dt \right).$$

R. a) $t = 2 \arccos \dfrac{8-s}{8}$, $s \in [0, 16]$. b) Dacă $t < 0$, atunci $t = -e^{-s}$, $s \in \mathbb{R}$; Dacă $t > 0$, atunci $t = e^s$, $s \in \mathbb{R}$.

Problema 9.3.7 *Să se determine curburile următoarelor curbe plane:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1, c_1(t) = \left(\dfrac{\cosh t}{t}, \dfrac{\sinh t}{t} \right)$ *într-un punct curent al curbei*;

b) $C_2 : y = e^{-x^2}$ *(clopotul lui Gauss) în punctul* $P(0,1)$;

c) $C_3 : x^3 - y^3 + 2xy = 0$ *în punctul* $P(1,-1)$;

R. a) $K_1(t) = \dfrac{-2t^4\sqrt{2}}{[(t-1)^2 e^{2t} + (t+1)^2 e^{-2t}]^{3/2}}$. b) $K_2(P) = -2$. c) $K_3(P) = 4\sqrt{2}$.

Problema 9.3.8 *Să se determine următoarele curbe plane ale căror curburi sunt date:*

a) $K(s) = \dfrac{1}{1+s^2}$, unde $s \in \mathbb{R}$ este parametrul canonic;

b) $K(s) = \sqrt{\dfrac{1}{e^{-2s}-1}}$, unde $s < 0$ este parametrul canonic.

R. a) Căutăm o curbă $(x(s), y(s))$ parametrizată canonic, adică o curbă cu proprietatea $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$. Rezultă că există o unică funcţie $\varphi(s) \in [0, 2\pi]$ astfel încât $x'(s) = \cos\varphi(s)$ şi $y'(s) = \sin\varphi(s)$. În acest context, avem

$$K(s) = \varphi'(s) = \frac{1}{1+s^2},$$

adică $\varphi(s) = \arctan s \in [-\pi/2, \pi/2]$, abstracţie făcând de o constantă. Prin urmare, obţinem

$$x'(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \text{ şi } y'(s) = \pm\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}.$$

Prin integrare, găsim curbele

$$x(s) = \ln\left(s + \sqrt{s^2+1}\right) \text{ şi } y(s) = \pm\sqrt{s^2+1},$$

abstracţie făcând de nişte constante. În final, calculând curburile curbelor anterioare, deducem că curba căutată este doar curba (abstracţie făcând de o roto-translaţie în plan)

$$x(s) = \ln\left(s + \sqrt{s^2+1}\right) \text{ şi } y(s) = \sqrt{s^2+1}.$$

b) Avem curba $x(s) = e^s$ şi $y(s) = -\left[\sqrt{1-e^{2s}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sqrt{1-e^{2s}}}{1+\sqrt{1-e^{2s}}}\right]$, abstracţie făcând de o roto-translaţie în plan.

Problema 9.3.9 *Să se determine ordinul de contact al punctului de intersecţie dintre* ***curba Agnési*** $x^2y = 4a^2(2a-y)$ *şi cercul* $x^2 + (y-a)^2 = a^2$, *unde* $a > 0$.

R. Punctul $P(0, 2a)$ este un contact de ordin trei.

Problema 9.3.10 *Să se determine parabola de grad doi cu axa paralelă cu axa Oy, care are un contact de ordin doi cu* ***parabola cubică*** $y = x^3$ *în punctul* $P(1, 1)$.

R. $y = 3x^2 - 3x + 1$.

Problema 9.3.11 *Să se determine înfăşurătoarele următoarelor familii de curbe plane şi, acolo unde este cazul, locul geometric al punctelor singulare ale acestora:*

a) $C_\alpha : (x-\alpha)^2 + y^2 - \dfrac{\alpha^2}{2} = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$;

b) $C_a : x\cos a + y \sin a - 1 = 0,\ a \in \mathbb{R}$;

c) $C_\lambda : y = \lambda x^2 + \dfrac{1}{2\lambda},\ \lambda \in \mathbb{R}^*$;

d) *familiei de drepte care determină pe axele de coordonate două segmente al căror produs este constant;*

e) *familiei de drepte situate la distanţă constantă faţă de un punct fix dat.*

R. a) Înfăşurătoarea este reuniunea de drepte concurente $\mathcal{C} = \{P(x,y) \mid (x-y)(x+y) = 0\} \backslash \{O(0,0)\}$. b) Înfăşurătoarea este cercul $\mathcal{C} = \{P(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. c) Înfăşurătoarea este reuniunea de drepte concurente $\mathcal{C} = \{P(x,y) \mid (y + x\sqrt{2})(y - x\sqrt{2}) = 0\} \backslash \{O(0,0)\}$. d) Înfăşurătoarea este reuniunea de hiperbole echilatere $\mathcal{C} = \{P(x,y) \mid (4xy - k)(4xy + k) = 0\}$, unde $k > 0$ este constanta dată în problemă. e) Înfăşurătoarea este cercul $\mathcal{C} = \{P(x,y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = k^2\}$, unde $P(x_0, y_0)$ este punctul fix, iar $k > 0$ este constanta dată în problemă.

Problema 9.3.12 *Să se determine evolutele curbelor:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1,\ c_1(t) = (\cos 2t, \sin 3t),\ t \in \mathbb{R}$, *(curba lui Lissajous);*

b) $C_2 : \sqrt{x^2 + y^2} = e^{\arctan(y/x)}$ *(spirala logaritmică).*

R. a) $X(t) = \dfrac{3\sin 3t \sin 4t + 4\cos 3t \cos 4t - 9\cos^3 3t}{6\sin 2t \sin 3t + 4\cos 2t \cos 3t}$,

$$Y(t) = \frac{3\sin 3t \cos 2t - 9\sin 2t \cos 6t - 4\sin^3 2t}{9\sin 2t \sin 3t + 6\cos 2t \cos 3t}.$$

b) Căutând o parametrizare de forma $y = tx$, găsim că spirala logaritmică poate fi parametrizată ca $C_2\backslash\{P(0,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Im} c_2^1 \cup \operatorname{Im} c_2^2$, unde $c_2^{1,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$c_2^{1,2}(t) = \left(\pm\frac{e^{\arctan t}}{1+t^2}, \pm\frac{te^{\arctan t}}{1+t^2}\right).$$

Evoluta curbei $C_2^1 = \operatorname{Im} c_2^1$ este determinată de

$$X(t) = -\frac{te^{\arctan t}}{\sqrt{1+t^2}} \text{ şi } Y(t) = \frac{e^{\arctan t}}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Analog se tratează cazul curbei $C_2^2 = \operatorname{Im} c_2^2$. Evoluta spiralei logaritmice se obţine reunind evolutele curbelor C_2^1 şi C_2^2.

Problema 9.3.13 *Să se determine coordonatele centrului şi raza cercului osculator într-un punct curent al curbei*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (t, \cos t)$;

b) $C_2 : \sqrt{x^2+y^2} = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

R. a) $X(t) = t - \tan t - \tan t \cdot \sin^2 t$, $Y(t) = -2\tan t \cdot \sin t$ sunt coordonatele centrului cercului osculator şi $R(t) = \dfrac{(1+\sin^2 t)^{3/2}}{|\cos t|}$ este raza de curbură, unde $t \neq (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Căutând o parametrizare de forma $y = tx$, găsim că curba dată poate fi parametrizată ca $C_2\backslash\{O(0,0)\} = \operatorname{Im} c_2^1 \cup \operatorname{Im} c_2^2$, unde $c_2^{1,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$c_2^{1,2}(t) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{t^2+1}, \pm\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{t}{t^2+1}\right).$$

În continuare se aplică formulele care determină cercul osculator (coordonatele centrului şi raza de curbură).

Problema 9.3.14 *Să se determine înfăşurătoarea familiei de normale ale curbei:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (t - t^3, t^2 - t^4)$;

b) $C_2 : \sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{3y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{4y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ *(rozeta cu trei foi).*

Ind. a) Se ţine cont de faptul că înfăşurătoarea familiei de normale este exact evoluta curbei $(X(t), Y(t))$ şi se aplică formulele corespunzătoare acesteia. b) Se caută o parametrizare raţională de forma $y = tx$ şi apoi se aplică formulele de la evolută.

Problema 9.3.15 *Să se determine evoluta şi evolventa parabolei cubice.*

R. Evoluta parabolei cubice $y = x^3$ este curba $X(t) = \dfrac{t(1-9t^4)}{2}$ şi $Y(t) = \dfrac{1+15t^4}{6t}$, $t \neq 0$. Evolventa parabolei cubice $y = x^3$ este curba plană $(x(s), y(s))$ care are raza de curbură

$$R(s) = \int_0^s \sqrt{1+9t^4}dt,$$

unde s este parametrul canonic.

Capitolul 10

Curbe în spaţiu

10.1 Elemente teoretice fundamentale

Fie spaţiul punctual euclidian al vectorilor liberi din plan $\mathcal{E}_3 = (E_3, V_3, \varphi)$ şi $\mathcal{R} = \{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ un reper ortonormat în acest spaţiu. Să presupunem că prin (x, y, z) desemnăm coordonatele punctelor din spaţiul afin $\mathcal{E}_3$.

Definiţia 10.1.1 *O funcţie diferenţiabilă $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definită de componentele $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ şi având proprietatea*

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0, \ \forall\ t \in I,$$

*se numeşte **curbă parametrizată regulată în spaţiu**.*

Mulţimea de puncte $C = \operatorname{Im} c = \{P(x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{E}_3 \mid t \in I\}$ se numeşte *imaginea curbei în spaţiu* c sau, prin abuz de limbaj, *curbă în spaţiu parametrizată*. Argumentul t al curbei în spaţiu parametrizate c se numeşte *parametrul curbei* şi, adesea, în aplicaţii, joacă rolul timpului uzual. Vectorul $\dot{c}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ se numeşte *vectorul viteză* sau *vectorul tangent* al curbei C în punctul $P = c(t)$. Vectorul $\ddot{c}(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$ se numeşte *vectorul acceleraţie* al curbei C în punctul $P = c(t)$.

Definiţia 10.1.2 *Un punct $P = c(t)$ al unei curbe în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, nu neapărat regulată, se numeşte **punct critic** sau **singular** al curbei dacă*

$$\dot{c}(t) = (0, 0, 0).$$

*În caz contrar, punctul $P = c(t)$ se numeşte **punct regulat** al curbei.*

Propoziţia 10.1.1 *Într-un punct regulat $P(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ al unei curbe în spaţiu parametrizate $C = \operatorname{Im} c$ ecuaţiile **dreptei tangente** la curbă sunt*

$$T_P C : \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

*iar ecuaţia **planului normal** este descrisă de*

$$N_P C : (x - x(t_0))x'(t_0) + (y - y(t_0))y'(t_0) + (z - z(t_0))z'(t_0) = 0.$$

Definiţia 10.1.3 *O mulţime de puncte $P(x, y, z)$ din spaţiul afin $\mathcal{E}_3$, ale căror coordonate verifică două relaţii de forma*

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

unde $f, g : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii diferenţiabile cu proprietatea

$$\{(grad\ f) \times (grad\ g)\}(x, y, z) \neq \overline{0},\ \forall\ (x, y, z) \in C,$$

gradienţii funcţiilor f şi g fiind definiţi prin

$$grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \stackrel{not}{=} f_x, \frac{\partial f}{\partial y} \stackrel{not}{=} f_y, \frac{\partial f}{\partial z} \stackrel{not}{=} f_z, \right)$$

şi

$$grad\ g = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \stackrel{not}{=} g_x, \frac{\partial g}{\partial y} \stackrel{not}{=} g_y, \frac{\partial g}{\partial z} \stackrel{not}{=} g_z, \right),$$

*se numeşte **curbă în spaţiu regulată definită implicit**.*

Definiţia 10.1.4 *Un punct $P(x_0, y_0, z_0)$ al unei curbe în spaţiu, nu neapărat regulată, definită implicit prin*

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

*se numeşte **punct critic** sau **singular** al curbei dacă*

$$\{(grad\ f) \times (grad\ g)\}(x_0, y_0, z_0) = \overline{0}.$$

*În caz contrar, punctul P se numeşte **punct regulat** al curbei în spaţiu.*

Propoziţia 10.1.2 *Într-un punct regulat $P(x_0, y_0, z_0)$ al unei curbe în spaţiu definite implicit prin*

$$C : \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

ecuaţiile ***dreptei tangente*** *la curbă sunt*

$$T_PC : \frac{x - x_0}{T_1(P)} = \frac{y - y_0}{T_2(P)} = \frac{z - z_0}{T_3(P)},$$

iar ecuaţia ***planului normal*** *este descrisă de*

$$N_PC : (x - x_0) \cdot T_1(P) + (y - y_0) \cdot T_2(P) + (z - z_0) \cdot T_3(P) = 0,$$

unde

$$T_1(P) = \begin{vmatrix} f_y(P) & f_z(P) \\ g_y(P) & g_z(P) \end{vmatrix} = \left.\frac{D(f,g)}{D(y,z)}\right|_{P(x_0,y_0,z_0)},$$

$$T_2(P) = -\begin{vmatrix} f_x(P) & f_z(P) \\ g_x(P) & g_z(P) \end{vmatrix} = -\left.\frac{D(f,g)}{D(x,z)}\right|_{P(x_0,y_0,z_0)},$$

$$T_3(P) = \begin{vmatrix} f_x(P) & f_y(P) \\ g_x(P) & g_y(P) \end{vmatrix} = \left.\frac{D(f,g)}{D(x,y)}\right|_{P(x_0,y_0,z_0)}.$$

Ca şi în cazul curbelor plane, este foarte important de remarcat că, cu ajutorul Teoremei Funcţiilor Implicite din Analiza Matematică, se poate demonstra că, cel puţin la nivel local, orice curbă spaţială definită implicit poate fi reprezentată la nivel parametric (poate fi parametrizată) şi reciproc. Acest rezultat este însă unul calitativ deoarece, în situaţii concrete, conversia curbelor spaţiale de la reprezentarea implicită la cea parametrică, şi viceversa, nu este întotdeauna o problemă uşor de rezolvat.

Fie $c : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$, o curbă în spaţiu parametrizată şi fie $\dot{c}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ câmpul viteză al curbei $C = \operatorname{Im} c$. În acest context, *lungimea curbei C* este independentă de parametrizare şi este determinată de formula

$$L(C) = \int_a^b ||\dot{c}(t)||dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Definiţia 10.1.5 *Parametrul $t \in I$ al unei curbe în spaţiu $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ se numeşte* ***parametru canonic*** *sau* ***natural*** *dacă $||\dot{c}(t)|| = 1$, $\forall\ t \in I$, (curba $C = \operatorname{Im} c$ are viteza egală cu unu). În această situaţie, prin convenţie, parametrul t se notează cu s.*

Fie $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, unde $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$, o curbă în spaţiu regulată, nu neapărat parametrizată natural, şi fie $t_0 \in I$ un punct fixat în intervalul I. Să considerăm parametrizarea prin *lungimea de arc*, definită de relaţia

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\dot{c}(\sigma)|| d\sigma,$$

şi să considerăm inversa acesteia $t = t(s)$ (se poate demonstra că funcţia $t \to s(t)$ este întotdeauna inversabilă).

Teorema 10.1.3 *Curba în spaţiu* $\widetilde{c} : [0, L(C)] \to \mathbb{R}^3$, *definită prin*

$$\widetilde{c}(s) = c(t(s)),$$

este parametrizată canonic (i. e. $||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = 1$, $\forall s \in [0, L(C)]$*).*

Corolarul 10.1.4 *Orice curbă în spaţiu regulată poate fi reparametrizată canonic (natural) prin lungimea de arc.*

Rezultatele precedente au un puternic caracter calitativ deoarece, în practică, pe curbe concrete, nu este întotdeauna uşor de construit efectiv reparametrizarea canonică prin lungimea de arc.

Dacă $c(s) = (x(s), y(s), z(s))$ este o curbă spaţială parametrizată canonic, atunci vectorul

$$T(s) = \dot{c}(s)$$

unde $\dot{c}(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$, se numeşte *versorul tangent* iar vectorul

$$N(s) = \frac{1}{||\ddot{c}(s)||} \cdot \ddot{c}(s),$$

unde $\ddot{c}(s) = (x''(s), y''(s), z''(s))$, se numeşte *versorul normal* al curbei în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$ în punctul $P = c(s)$. Reperul ortonormat mobil

$$\mathcal{R} = \{c(s);\ T(s), N(s), B(s)\},$$

unde

$$B(s) = T(s) \times N(s),$$

se numeşte *reperul Frénet* al curbei în spaţiu C. Versorul $B(s)$ se numeşte *versorul binormal* al curbei în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$ în punctul $P = c(s)$.

Variaţia versorilor $T(s)$, $N(s)$ şi $B(s)$ ai reperului Frénet al curbei în spaţiu $c(s) = (x(s), y(s), z(s))$ parametrizate canonic este determinată de *formulele lui Frénet*

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} = K(s) \cdot N(s) \\ \dfrac{dN}{ds} = -K(s) \cdot T(s) + \tau(s) \cdot B(s), \\ \dfrac{dB}{ds} = -\tau(s) \cdot N(s), \end{cases}$$

unde $K(s) = ||\ddot{c}(s)||$ reprezintă *curbura* iar

$$\tau(s) = -\left\langle \frac{dB}{ds}, N(s) \right\rangle$$

reprezintă *torsiunea* curbei în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$ într-un punct curent $P = c(s)$ al curbei parametrizate canonic.

Teorema 10.1.5 *Dacă $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ este o curbă în spaţiu parametrizată arbitrar, atunci reperul lui Frénet $\mathcal{R} = \{c(t);\ T(t), N(t), B(t)\}$ al curbei în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$ este reprezentat de vectorii*

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{||\dot{c}(t)||} \cdot \dot{c}(t), \\ N(t) &= B(t) \times T(t), \\ B(t) &= \frac{1}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||} \cdot [\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)]\,. \end{aligned}$$

Teorema 10.1.6 (Formulele lui Frénet pentru curbe în spaţiu) *Variaţia versorilor $T(t)$, $N(t)$ şi $B(t)$ ai reperului Frénet al curbei în spaţiu $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ parametrizate arbitrar este determinată de formulele*

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = K(t) \cdot v(t) \cdot N(t) \\ \dfrac{dN}{dt} = -K(t) \cdot v(t) \cdot T(t) + \tau(t) \cdot v(t) \cdot B(t), \\ \dfrac{dB}{dt} = -\tau(t) \cdot v(t) \cdot N(t), \end{cases}$$

unde $v(t) = ||\dot{c}(t)||$ reprezintă ***viteza****,*

$$K(t) = \frac{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||}{||\dot{c}(t)||^3}$$

reprezintă ***curbura*** *iar*

$$\tau(t) = \frac{\det[\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t)]}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||^2}$$

reprezintă ***torsiunea*** *curbei în spaţiu* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul curent* $P = c(t)$ *al curbei parametrizate arbitrar.*

Definiţia 10.1.6 (Feţele triedrului lui Frénet) *i) Planul determinat de punctul* $P = c(t)$ *şi versorii* $T(t)$ *şi* $N(t)$ *se numeşte* ***planul osculator.***

ii) Planul determinat de punctul $P = c(t)$ *şi versorii* $T(t)$ *şi* $B(t)$ *se numeşte* ***planul rectificant.***

iii) Planul determinat de punctul $P = c(t)$ *şi versorii* $N(t)$ *şi* $B(t)$ *se numeşte* ***planul normal.***

Definiţia 10.1.7 (Muchiile triedrului lui Frénet) *i) Dreapta determinată de punctul* $P = c(t)$ *şi versorul* $T(t)$ *se numeşte* ***tangentă.***

ii) Dreapta determinată de punctul $P = c(t)$ *şi versorul* $N(t)$ *se numeşte* ***normala principală.***

iii) Dreapta determinată de punctul $P = c(t)$ *şi versorul* $B(t)$ *se numeşte* ***binormală.***

Din punct de vedere geometric, curbura $K(t)$ măsoară gradul de încovoiere al curbei în vecinătatea punctului $P = c(t)$, prin măsurarea variaţiei direcţiei versorului tangent $T(t)$ în imediata apropiere a punctului P.

În acelaşi timp, torsiunea $\tau(t)$ măsoară abaterea curbei de la *planul osculator* determinat de versorii $T(t)$ şi $N(t)$ în imediata vecinătate a punctului $P = c(t)$. Am dori să menţionăm că ecuaţia planului osculator în punctul P al curbei în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$ este

$$\pi_0 : \begin{vmatrix} x - x(t) & y - y(t) & z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Observaţia 10.1.7 *i) O curbă în spaţiu cu curbura* $K(t) = 0$, $\forall\ t \in I$, *este un* ***segment de dreaptă.***

ii) O curbă în spaţiu cu torsiunea $\tau(t) = 0$, $\forall\ t \in I$, *este o* ***curbă plană.***

10.2 Probleme rezolvate

Problema 10.2.1 *Să se determine o parametrizare a următoarelor curbe în spaţiu definite implicit:*

i) $C_1 : xyz = 1,\ x = y^2$, (curba lui Ţiţeica);

ii) $C_2 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 = ax,\ a > 0$, (curba lui Viviani).

Rezolvare. i) Luând $y(t) = t$, deducem că $x(t) = t^2$ şi $z(t) = 1/t^3$. În concluzie, curba lui Ţiţeica este imaginea parametrizării

$$c_1 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^3,\ c_1(t) = \left(t^2, t, \frac{1}{t^3}\right),$$

adică avem $C_1 = \operatorname{Im} c_1$.

ii) În ecuaţia cilindrului $y^2 = ax - x^2$ luăm $x(t) = a\sin^2 t$, $t \in [0, \pi/2]$. Deducem că $y(t) = a \sin t \cos t$ şi $z(t) = \pm a \cos t$. Prin urmare, curba lui Viviani este imaginea parametrizării

$$c_2 : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3,\ c_2(t) = \left(a\sin^2 t, a \sin t \cos t, \pm a \cos t\right),$$

adică avem $C_2 = \operatorname{Im} c_2$. ■

Problema 10.2.2 *Să se determine punctele singulare ale următoarelor curbe în spaţiu:*

i) $C_1 = \operatorname{Im} c_1,\ c_1(t) = (t^2 - 2t, t^2 + 1/t^2, t^2 - 2t - 1),\ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$;

ii) $C_2 : z^2 - xy = 0,\ x^2 - z^2 + 2xy + z = 0$.

Rezolvare. i) Punctele singulare ale curbei C_1 se obţin rezolvând ecuaţia

$$\dot{c}_1(t) = (2t - 2, 2t - 2/t^3, 2t - 2) = (0, 0, 0).$$

În concluzie, curba în spaţiu C_1 are un singur punct singular, şi anume

$$P(t = 1) \equiv P(-1, 2, -2).$$

ii) Curba în spaţiu C_2 este definită de funcţiile $f(x, y, z) = z^2 - xy$ şi $g(x, y, z) = x^2 - z^2 + 2xy + z$, ale căror gradienţi sunt

$$(grad\ f)(x, y, z) = (-y, -x, 2z)$$

şi

$$(grad\ g)(x,y,z) = (2x+2y, 2x, -2z+1).$$

Produsul vectorial al gradienţilor este

$$\begin{aligned}\{grad\ f \times grad\ g\}(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -y & -x & 2z \\ 2x+2y & 2x & -2z+1 \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv (-x-2xz, y+2yz+4xz, 2x^2).\end{aligned}$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \{grad\ f \times grad\ g\}(x,y,z) = (0,0,0) \\ z^2 - xy = 0 \\ x^2 - z^2 + 2xy + z = 0, \end{cases}$$

deducem că curba în spaţiu C_2 are un singur punct singular $P(0,0,0)$. ■

Problema 10.2.3 *Să se scrie ecuaţiile dreptelor tangente şi a planelor normale la curbele în spaţiu C_1 şi C_2, în punctele precizate:*

i) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = \left(a(1-\cos t), a\sin t, 2a\cos\frac{t}{2}\right)$, $a > 0$, în punctul $P\left(a, a, a\sqrt{2}\right)$;

ii) $C_2 : x^2 + z^2 - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 4 = 0$ în punctul $P(\sqrt{3}, 1, 1)$.

Rezolvare. i) Punctul P este corespunzător lui $t = \pi/2$ iar vectorul viteză al curbei $C_1 = \operatorname{Im} c_1$ este

$$\dot{c}_1(t) = \left(a\sin t, a\cos t, -a\sin\frac{t}{2}\right).$$

Prin urmare avem $\dot{c}_1(\pi/2) = (a, 0, -a\sqrt{2}/2)$. Rezultă că ecuaţiile dreptei tangente şi a planului normal în punctul P sunt

$$T_P C_1 : \frac{x-a}{a} = \frac{y-a}{0} = \frac{z-a\sqrt{2}}{-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{2}z - 3a = 0 \\ y - a = 0 \end{cases}$$

şi

$$\begin{aligned} N_P C_1 &: (x-a)\cdot a + (y-a)\cdot 0 - \left(z - a\sqrt{2}\right)\frac{a\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ N_P C_1 &: ax - \frac{a\sqrt{2}}{2} z = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x - z = 0. \end{aligned}$$

ii) Gradienţii funcţiilor $f(x,y,z) = x^2 + z^2 - 4$ şi $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4$ sunt daţi de

$$(grad\ f)(x,y,z) = (2x, 0, 2z) \text{ şi } (grad\ g)(x,y,z) = (2x, 2y, 0).$$

În particular, obţinem

$$(grad\ f)(P) = (2\sqrt{3}, 0, 2) \text{ şi } (grad\ g)(P) = (2\sqrt{3}, 2, 0).$$

Produsul vectorial al gradienţilor este

$$(grad\ f)(P) \times (grad\ g)(P) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2\sqrt{3} & 0 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot \overline{i} + 4\sqrt{3} \cdot \overline{j} + 4\sqrt{3} \cdot \overline{k}.$$

Prin urmare, ecuaţiile dreptei tangente şi a planului normal în punctul P sunt

$$T_P C_2 : \frac{x - \sqrt{3}}{-4} = \frac{y-1}{4\sqrt{3}} = \frac{z-1}{4\sqrt{3}}$$

şi

$$\begin{aligned} N_P C_2 \quad &: \quad \left(x - \sqrt{3}\right) \cdot (-4) + (y-1) \cdot 4\sqrt{3} + (z-1) \cdot 4\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \\ N_P C_2 \quad &: \quad x - \sqrt{3}y - \sqrt{3}z + \sqrt{3} = 0. \end{aligned}$$

■

Problema 10.2.4 *Să se scrie ecuaţiile tangentelor la curba* $C = \operatorname{Im} c$*, unde*

$$c(t) = \left(\frac{t^4}{2}, -\frac{t^3}{3}, t^2\right), \ t \in \mathbb{R},$$

care sunt paralele cu planul $\pi : 3x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Rezolvare. Vectorul tangent la curbă într-un punct arbitrar este dat de $\dot{c}(t) = \left(2t^3, -t^2, 2t\right)$ iar vectorul normal la plan este $\overline{n}_\pi(3, -2, -2)$. Dacă tangenta este paralelă cu planul, atunci vectorii $\dot{c}(t)$ şi $\overline{n}_\pi$ sunt perpendiculari, adică avem

$$\langle \dot{c}(t), \overline{n}_\pi \rangle = 0 \Leftrightarrow 6t^3 + 2t^2 - 4t = 0 \Rightarrow t_1 = 0, \ t_2 = -1, \ t_3 = \frac{2}{3}.$$

În concluzie, punctele căutate sunt $P_1(0,0,0)$, $P_2(1/2, 1/3, 1)$ şi $P_3(8/81, -8/81, 4/9)$. ■

Problema 10.2.5 *Să se determine planele osculatoare la curba $C = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c(t) = \left(2t-1, t^3, 1-t^2\right), \ t \in \mathbb{R},$$

care sunt perpendiculare pe planul $\pi : 7x - 12y + 5z - 7 = 0$.

Rezolvare. Avem $x(t) = 2t-1$, $y(t) = t^3$, $z(t) = 1-t^2$ iar, prin derivări succesive, obţinem $x'(t) = 2$, $y'(t) = 3t^2$, $z'(t) = -2t$ şi $x''(t) = 0$, $y''(t) = 6t$, $z''(t) = -2$. Rezultă că ecuaţia planului osculator într-un punct curent al curbei $C = \operatorname{Im} c$ este

$$\pi_0 \ : \ \begin{vmatrix} x-2t+1 & y-t^3 & z+t^2-1 \\ 2 & 3t^2 & -2t \\ 0 & 6t & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\pi_0 \ : \ 6t^2x + 4y + 12tz - 4t^3 + 6t^2 - 12t = 0.$$

Vectorul normal la planul osculator este $\overline{n}_0(6t^2, 4, 12t)$ iar normala la planul π este $\overline{n}_\pi(7, -12, 5)$. Condiţia ca cele două plane să fie perpendiculare este

$$\langle \overline{n}_0, \overline{n}_\pi \rangle = 0 \Leftrightarrow 42t^2 + 60t - 48 = 0 \Rightarrow t_1 = -2, \ t_2 = \frac{4}{7}.$$

Prin urmare, ecuaţiile planelor osculatoare căutate sunt

$$\pi_{01} : 6x + y - 6z + 20 = 0$$

şi

$$\pi_{02} : 168x + 343y + 588z - 484 = 0.$$

■

Problema 10.2.6 *Să se scrie ecuaţiile binormalelor la curba $C = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c(t) = \left(\frac{1}{t}, t, 2t^2 - 1\right), \ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

care sunt perpendiculare pe dreapta $d : x + y = 0, \ 4x - z = 0$.

Rezolvare. Prin derivări succesive obţinem $\dot{c}(t) = (-1/t^2, 1, 4t)$ şi $\ddot{c}(t) = (2/t^3, 0, 4)$. Binormala într-un punct curent al curbei în spaţiu este direcţionată de vectorul

$$\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1/t^2 & 1 & 4t \\ 2/t^3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \overline{i} + \frac{12}{t^2} \cdot \overline{j} - \frac{2}{t^3} \cdot \overline{k}.$$

Normalele la planele care determină dreapta d sunt $\overline{n}_1(1,1,0)$ şi $\overline{n}_2(4,0,-1)$ iar direcţia dreptei d este dată de vectorul

$$\overline{v} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\overline{i} + \overline{j} - 4\overline{k}.$$

Condiţia de perpendicularitate a binormalei cu dreapta d este

$$\begin{aligned} \langle \dot{c}(t) \times \ddot{c}(t), \overline{v} \rangle &= 0 \Leftrightarrow -4 + \frac{12}{t^2} + \frac{8}{t^3} = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t - 2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_1 = t_2 = -1,\ t_3 = 2. \end{aligned}$$

În concluzie, binormalele căutate au ecuaţiile

$$B_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-1}{1}$$

şi

$$B_2 : \frac{x - \frac{1}{2}}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-7}{-\frac{1}{4}}.$$

■

Problema 10.2.7 *Să se calculeze lungimile următoarelor curbe în spaţiu:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, unde

$$c_1(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t);$$

b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, unde

$$c_2(t) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2}, t \right).$$

Rezolvare. a) Vectorul viteză al curbei C_1 este

$$\dot{c}_1(t) = \big(e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t), e^t\big)$$

iar norma vectorului viteză este $||\dot{c}_1(t)|| = e^t\sqrt{3}$. În concluzie, avem

$$L(C_1) = \int_0^\pi e^t \sqrt{3} dt = \sqrt{3} e^t \Big|_0^\pi = \sqrt{3}(e^\pi - 1).$$

b) Vectorul viteză al curbei C_2 este

$$\dot{c}_2(t) = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}, \frac{e^t + e^{-t}}{2}, 1\right)$$

iar norma vectorului viteză este

$$||\dot{c}_2(t)|| = \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{2}}.$$

În concluzie, avem

$$L(C_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(e^t + e^{-t}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^t\Big|_0^1 - e^{-t}\Big|_0^1 \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e - \frac{1}{e}\right).$$

■

Problema 10.2.8 *Să se arate că curbele în spaţiu nu sunt parametrizate canonic şi, în consecinţă, să se reparametrizeze canonic prin lungimea de arc:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, unde $c_1(t) = (\cos 2t, \sin 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$;

b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, unde $c_2(t) = (e^t + e^{-t}, e^t - e^{-t}, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. a) Avem $\dot{c}_1(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t, 1)$, ceea ce implică $||\dot{c}_1(t)|| = \sqrt{5} \neq 1$. Construim parametrul canonic prin lungimea de arc

$$s = \int_0^t ||\dot{c}_1(\sigma)|| d\sigma = \int_0^t \sqrt{5} d\sigma = \sqrt{5}t.$$

Scriind t în funcţie de s, găsim $t = s/\sqrt{5}$. Cu alte cuvinte, avem $C_1 = \operatorname{Im} \widetilde{c}_1$, $\widetilde{c}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, unde

$$\widetilde{c}_1(s) = \left(\cos \frac{2s}{\sqrt{5}}, \sin \frac{2s}{\sqrt{5}}, \frac{s}{\sqrt{5}}\right).$$

b) Avem $\dot{c}_2(t) = (e^t - e^{-t}, e^t + e^{-t}, 2)$, ceea ce implică

$$||\dot{c}_2(t)|| = \left(e^t + e^{-t}\right)\sqrt{2} \neq 1.$$

Construim parametrul canonic prin lungimea de arc

$$s = \int_0^t ||\dot{c}_2(\sigma)|| d\sigma = \sqrt{2} \int_0^t \left(e^\sigma + e^{-\sigma}\right) d\sigma = \sqrt{2}\left(e^t - e^{-t}\right).$$

Scriind t în funcţie de s, găsim

$$0 < e^t = \frac{s+\sqrt{s^2+8}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = \ln\frac{s+\sqrt{s^2+8}}{2\sqrt{2}}.$$

Cu alte cuvinte, avem $C_2 = \operatorname{Im}\widetilde{c}_2$, $\widetilde{c}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\widetilde{c}_2(s) = (x(s), y(s), z(s))$, unde

$$\begin{aligned}
x(s) &= \frac{s+\sqrt{s^2+8}}{2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{s+\sqrt{s^2+8}},\\
y(s) &= \frac{s+\sqrt{s^2+8}}{2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{s+\sqrt{s^2+8}},\\
z(s) &= 2\ln\frac{s+\sqrt{s^2+8}}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

■

Problema 10.2.9 *Să se determine curburile şi torsiunile următoarelor curbe în spaţiu:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1, c_1(t) = (2t, t^2, \ln t)$, $t > 0$, *într-un punct arbitrar*;

b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2, c_2(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{t^2}{2}\right)$, *în punctul* $P(t = 0)$;

c) $C_3 = \operatorname{Im} c_3, c_3(t) = (\cos t, \sin t, \cos 2t)$, *în punctul* $P(0, 1, -1)$.

Rezolvare. a) Prin derivări succesive obţinem

$$\dot{c}_1(t) = \left(2, 2t, \frac{1}{t}\right),\ \ddot{c}_1(t) = \left(0, 2, -\frac{1}{t^2}\right),\ \dddot{c}_1(t) = \left(0, 0, \frac{2}{t^3}\right).$$

Produsul vectorial între vectorii $\dot{c}_1(t)$ şi $\ddot{c}_1(t)$ este

$$\dot{c}_1(t) \times \ddot{c}_1(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2t & 1/t \\ 0 & 2 & -1/t^2 \end{vmatrix} = -\frac{4}{t}\bar{i} + \frac{2}{t^2}\bar{j} + 4\bar{k},$$

ceea ce implică

$$||\dot{c}_1(t) \times \ddot{c}_1(t)|| = \frac{2(2t^2+1)}{t^2}.$$

Deoarece avem

$$||\dot{c}_1(t)|| = \frac{2t^2+1}{t}$$

şi

$$\det\left[\dot c_1(t), \ddot c_1(t), \dddot c_1(t)\right] = \begin{vmatrix} 2 & 2t & 1/t \\ 0 & 2 & -1/t^2 \\ 0 & 0 & 2/t^3 \end{vmatrix} = \frac{8}{t^3},$$

rezultă că curbura are expresia

$$K(t) = \frac{||\dot c_1(t) \times \ddot c_1(t)||}{||\dot c_1(t)||^3} = \frac{2t}{(2t^2+1)^2},$$

iar torsiunea este dată de formula

$$\tau(t) = \frac{\det\left[\dot c_1(t), \ddot c_1(t), \dddot c_1(t)\right]}{||\dot c_1(t) \times \ddot c_1(t)||^2} = \frac{2t}{(2t^2+1)^2}.$$

b) Prin derivări succesive obţinem

$$\begin{aligned} \dot c_2(t) &= (-\sin t, \cos t, t) \Rightarrow \dot c_2(0) = (0,1,0)\,, \\ \ddot c_2(t) &= (-\cos t, -\sin t, 1) \Rightarrow \ddot c_2(0) = (-1,0,1)\,, \\ \dddot c_2(t) &= (\sin t, -\cos t, 0) \Rightarrow \dddot c_2(0) = (0,-1,0)\,. \end{aligned}$$

Produsul vectorial între vectorii $\dot c_2(0)$ şi $\ddot c_2(0)$ este

$$\dot c_2(0) \times \ddot c_2(0) = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar i + \bar k,$$

ceea ce implică $||\dot c_2(0) \times \ddot c_2(0)|| = \sqrt{2}$. Deoarece avem $||\dot c_2(0)|| = 1$ şi

$$\det\left[\dot c_2(0), \ddot c_2(0), \dddot c_2(0)\right] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

rezultă că curbura în punctul P are expresia

$$K(P) = \frac{||\dot c_2(0) \times \ddot c_2(0)||}{||\dot c_2(0)||^3} = \sqrt{2},$$

iar torsiunea în punctul P *este dată de*

$$\tau(P) = \frac{\det\left[\dot c_2(0), \ddot c_2(0), \dddot c_2(0)\right]}{||\dot c_2(0) \times \ddot c_2(0)||^2} = 0.$$

c) Este evident că punctul $P(0,1,-1) \in C_3$ este corespunzător valorii $t = \pi/2$. Mai mult, prin derivări succesive obţinem

$$\begin{aligned}
\dot{c}_3(t) &= (-\sin t, \cos t, -2\sin 2t) \Rightarrow \dot{c}_3(\pi/2) = (-1,0,0)\,,\\
\ddot{c}_3(t) &= (-\cos t, -\sin t, -4\cos 2t) \Rightarrow \ddot{c}_3(\pi/2) = (0,-1,4)\,,\\
\dddot{c}_3(t) &= (\sin t, -\cos t, 8\sin 2t) \Rightarrow \dddot{c}_3(\pi/2) = (1,0,0)\,.
\end{aligned}$$

Produsul vectorial între vectorii $\dot{c}_3(\pi/2)$ şi $\ddot{c}_3(\pi/2)$ este

$$\dot{c}_3(\pi/2) \times \ddot{c}_3(\pi/2) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4\bar{j} + \bar{k},$$

ceea ce implică $||\dot{c}_3(\pi/2) \times \ddot{c}_3(\pi/2)|| = \sqrt{17}$. Deoarece avem

$$||\dot{c}_3(\pi/2)|| = 1$$

şi

$$\det\left[\dot{c}_3(\pi/2), \ddot{c}_3(\pi/2), \dddot{c}_3(\pi/2)\right] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

rezultă că curbura în punctul P are expresia

$$K(P) = \frac{||\dot{c}_3(\pi/2) \times \ddot{c}_3(\pi/2)||}{||\dot{c}_3(\pi/2)||^3} = \sqrt{17},$$

iar torsiunea în punctul P *este dată de*

$$\tau(P) = \frac{\det\left[\dot{c}_3(\pi/2), \ddot{c}_3(\pi/2), \dddot{c}_3(\pi/2)\right]}{||\dot{c}_3(\pi/2) \times \ddot{c}_3(\pi/2)||^2} = 0.$$

■

Problema 10.2.10 *Să se determine versorii triedrului lui Frénet, ecuaţiile muchiilor şi feţelor triedrului lui Frénet, curbura şi torsiunea, într-un punct curent sau într-un punct fixat, la curbele:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1, c_1(t) = (t^2, t, t^3 - 20)$, $t \in \mathbb{R}$, *într-un punct arbitrar*;

b) $C_2 : x^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 2$, *în punctul* $P(1, 1, \sqrt{3})$.

Rezolvare. a) Prin derivări succesive obţinem

$$\dot{c}_1(t) = \left(2t, 1, 3t^2\right), \ \ddot{c}_1(t) = (2, 0, 6t), \ \dddot{c}_1(t) = (0, 0, 6).$$

Produsul vectorial între vectorii $\dot{c}_1(t)$ şi $\ddot{c}_1(t)$ este

$$\dot{c}_1(t) \times \ddot{c}_1(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2t & 1 & 3t^2 \\ 2 & 0 & 6t \end{vmatrix} = 6t\bar{i} - 6t^2\bar{j} - 2\bar{k}.$$

Deoarece avem

$$||\dot{c}_1(t)|| = \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}$$

şi

$$||\dot{c}_1(t) \times \ddot{c}_1(t)|| = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1},$$

rezultă că versorul tangent este

$$T(t) = \frac{1}{||\dot{c}_1(t)||} \cdot \dot{c}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}} \cdot \left(2t, 1, 3t^2\right)$$

iar versorul binormal este

$$B(t) = \frac{\dot{c}_1(t) \times \ddot{c}_1(t)}{||\dot{c}_1(t) \times \ddot{c}_1(t)||} = \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}} \cdot \left(3t, -3t^2, -1\right).$$

Deducem că versorul normal este

$$\begin{aligned} N(t) &= B(t) \times T(t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1} \cdot \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3t & -3t^2 & -1 \\ 2t & 1 & 3t^2 \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1} \cdot \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}} \cdot \left(1 - 9t^4, -9t^3 - 2t, 6t^3 + 3t\right). \end{aligned}$$

În consecinţă, ecuaţia tangentei este

$$\frac{x - t^2}{2t} = \frac{y - t}{1} = \frac{z - t^3 + 20}{3t^2},$$

ecuaţia binormalei este

$$\frac{x - t^2}{3t} = \frac{y - t}{-3t^2} = \frac{z - t^3 + 20}{-1}$$

iar ecuaţia normalei principale este

$$\frac{x-t^2}{1-9t^4} = \frac{y-t}{-t(9t^2+2)} = \frac{z-t^3+20}{3t(2t^2+1)}.$$

Ecuaţia planului normal este

$$\left(x-t^2\right)\cdot 2t + (y-t)\cdot 1 + \left(z-t^3+20\right)\cdot 3t^2 = 0,$$

ecuaţia planului osculator este

$$\left(x-t^2\right)\cdot 3t + (y-t)\cdot\left(-3t^2\right) - \left(z-t^3+20\right) = 0$$

iar ecuaţia planului rectificant este

$$\left(x-t^2\right)\left(1-9t^4\right) - t\,(y-t)\,(9t^2+2) + 3t\left(z-t^3+20\right)(2t^2+1) = 0.$$

În final, deoarece avem

$$\det\left[\dot{c}_1(t), \ddot{c}_1(t), \dddot{c}_1(t)\right] = \begin{vmatrix} 2t & 1 & 3t^2 \\ 2 & 0 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12,$$

rezultă că curbura are expresia

$$K(t) = \frac{||\dot{c}_1(t)\times\ddot{c}_1(t)||}{||\dot{c}_1(t)||^3} = \frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{(9t^4+4t^2+1)\sqrt{9t^4+4t^2+1}},$$

iar torsiunea este dată de formula

$$\tau(t) = \frac{\det\left[\dot{c}_1(t), \ddot{c}_1(t), \dddot{c}_1(t)\right]}{||\dot{c}_1(t)\times\ddot{c}_1(t)||^2} = \frac{-3}{9t^4+9t^2+1}.$$

b) Fie funcţiile $f(x,y,z) = x^2+z^2-4$ şi $g(x,y,z) = x^2+y^2-2$. Deoarece avem

$$\left.\frac{D(f,g)}{D(y,z)}\right|_{P(1,1,\sqrt{3})} = \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4\sqrt{3} \neq 0,$$

rezultă din Teorema Funcţiilor Implicite că din ecuaţiile $f(x,y,z) = 0$ şi $g(x,y,z) = 0$ putem scoate pe y şi z ca funcţii de x. În consecinţă, putem parametriza local curba $C_2 = \operatorname{Im} c_2$ luând $x = t$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, unde

$$f(t, y(t), z(t)) = 0 \text{ şi } g(t, y(t), z(t)) = 0.$$

Mai mult, avem $y(1) = 1$ şi $z(1) = \sqrt{3}$ şi deci punctul $P(1,1,\sqrt{3})$ este corespunzător valorii $t = 1$.

Prin derivarea ecuaţiilor $t^2 + y^2 - 2 = 0$ şi $t^2 + z^2 - 4 = 0$ găsim relaţiile

$$\begin{aligned} t + yy' &= 0,\ t + zz' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{t}{y},\ z' = -\frac{t}{z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ y'(1) = -1,\ z'(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Derivând din nou, obţinem

$$\begin{aligned} 1 + \left(y'\right)^2 + yy'' &= 0,\ 1 + \left(z'\right)^2 + zz'' = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y},\ z' = -\frac{1 + (z')^2}{z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ y''(1) = -2,\ z''(1) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Derivând în continuare, deducem că

$$\begin{aligned} 3y'y'' + yy''' &= 0,\ 3z'z'' + zz''' = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ y''' = -\frac{3y'y''}{y},\ z' = -\frac{3z'z''}{z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ y'''(1) = -6,\ z'''(1) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Prin derivări succesive obţinem

$$\begin{aligned} \dot{c}_2(t) &= (1, y', z') \Rightarrow \dot{c}_2(1) = \left(1, -1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ \ddot{c}_2(t) &= (0, y'', z'') \Rightarrow \ddot{c}_2(1) = \left(0, -2, -\frac{4}{3\sqrt{3}}\right), \\ \dddot{c}_2(t) &= (0, y''', z''') \Rightarrow \dddot{c}_2(1) = \left(0, -6, -\frac{4}{3\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Produsul vectorial între vectorii $\dot{c}_2(1)$ şi $\ddot{c}_2(1)$ este

$$\dot{c}_2(1) \times \ddot{c}_2(1) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2 & -4/(3\sqrt{3}) \end{vmatrix} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\bar{i} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\bar{j} - 2\bar{k}.$$

Deoarece avem

$$||\dot{c}_2(1)|| = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

şi

$$||\dot{c}_2(1) \times \ddot{c}_2(1)|| = \sqrt{\frac{128}{27}} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}},$$

rezultă că versorul tangent este

$$T(1) = \frac{1}{||\dot{c}_2(1)||} \cdot \dot{c}_2(1) = \sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \left(1, -1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

iar versorul binormal este

$$B(1) = \frac{\dot{c}_2(1) \times \ddot{c}_2(1)}{||\dot{c}_2(1) \times \ddot{c}_2(1)||} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}, -1\right).$$

Deducem că versorul normal este

$$\begin{aligned} N(1) &= B(1) \times T(1) = \frac{9}{4\sqrt{14}} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1/(3\sqrt{3}) & 2/(3\sqrt{3}) & -1 \\ 1 & -1 & -1/\sqrt{3} \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv -\frac{1}{4\sqrt{14}} \cdot \left(11, 10, \sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

În consecinţă, ecuaţia tangentei este

$$\frac{x-1}{\sqrt{3}} = \frac{y-1}{-\sqrt{3}} = \frac{z-\sqrt{3}}{-1},$$

ecuaţia binormalei este

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-\sqrt{3}}{-3\sqrt{3}}$$

iar ecuaţia normalei principale este

$$\frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{10} = \frac{z-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Ecuaţia planului normal este

$$(x-1) \cdot \sqrt{3} - (y-1) \cdot \sqrt{3} - \left(z - \sqrt{3}\right) = 0,$$

ecuaţia planului osculator este

$$-(x-1) + 2(y-1) - 3\sqrt{3}\left(z - \sqrt{3}\right) = 0$$

iar ecuaţia planului rectificant este

$$11\,(x-1)+10(y-1)+\sqrt{3}\left(z-\sqrt{3}\right)=0.$$

În final, deoarece avem

$$\det\left[\dot{c}_2(1),\ddot{c}_2(1),\dddot{c}_2(1)\right]=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2 & -4/(3\sqrt{3}) \\ 0 & -6 & -4/(3\sqrt{3}) \end{vmatrix}=-\frac{16}{3\sqrt{3}},$$

rezultă că curbura are expresia

$$K(t)=\frac{||\dot{c}_2(1)\times\ddot{c}_2(1)||}{||\dot{c}_2(1)||^3}=\frac{8\sqrt{2}}{7\sqrt{7}},$$

iar torsiunea este dată de formula

$$\tau(t)=\frac{\det\left[\dot{c}_2(1),\ddot{c}_2(1),\dddot{c}_2(1)\right]}{||\dot{c}_2(1)\times\ddot{c}_2(1)||^2}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

■

10.3 Probleme propuse

Problema 10.3.1 *Să se arate că curba în spaţiu* $C=\operatorname{Im}c$, *unde*

$$c(t)=\left(t^2-2t,\frac{1}{t^2}+t^2,t^2-2t-1\right),\ t\in\mathbb{R}\backslash\{0\},$$

are imaginea inclusă într-un plan şi să se determine ecuaţia acestui plan.

R. Avem $C=\operatorname{Im}c\subset\pi$, unde $\pi:-x+z+1=0$.

Problema 10.3.2 *Să se arate că curba în spaţiu* $C=\operatorname{Im}c$, *unde*

$$c(t)=\left(\frac{t}{1+t^2+t^4},\frac{t^2}{1+t^2+t^4},\frac{t^3}{1+t^2+t^4}\right),\ t\in\mathbb{R},$$

are imaginea inclusă într-o sferă.

R. Avem $C=\operatorname{Im}c\subset(S)$, unde

$$(S):x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{1}{4}.$$

Problema 10.3.3 *Să se arate că curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c(t) = \left(a\cos^2 t, a\sqrt{2}\sin t\cos t, a\sin^2 t\right),\ \ a > 0,\ \ t \in \mathbb{R},$$

are imaginea inclusă într-un con.

R. Eliminând parametrul $t \in \mathbb{R}$, găsim că avem $C = \operatorname{Im} c \subset \Sigma$, unde $\Sigma : y^2 = 2xz$. Efectuând rotaţia în spaţiu

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + z') \\ y = y' \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x' + z'), \end{cases}$$

deducem că cuadrica Σ este conul cu vârful în origine, definit de ecuaţia

$$\Sigma : x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0.$$

Curba dată se află la intersecţia acestui con cu planul $\pi : x + z = a$.

Problema 10.3.4 *Să se scrie ecuaţia planului normal la curba $C = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c(t) = \left(\ln t, 2t, t^2\right),\ \ t > 0,$$

care este paralel cu dreapta $d : x + 4y = 0,\ y - z = 0$.

R. $\pi_{(t=1)} : x + 2y + 2z - 6 = 0$.

Problema 10.3.5 *Să se scrie ecuaţia planului normal şi ecuaţiile tangentei la curba*

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

în punctul $P\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$.

R. $T_P C : \begin{cases} x - y - \sqrt{2} = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$; $N_P C : 2x + 2y + 2z - \sqrt{2} = 0$.

Problema 10.3.6 *Să se găsească ecuaţiile planelor osculatoare la curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c(t) = \left(t^4 - 1, t^3 + 1, -2t\right),\ \ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

care sunt paralele cu dreapta

$$d : \frac{x - 1}{12} = \frac{y + 1}{-7} = \frac{z}{2}.$$

R. $\pi^{Osc}_{(t=-2)} : x + 4y + 8z - 19 = 0;$

$\pi^{Osc}_{(t=-1)} : x + 2y + z - 2 = 0;$

$\pi^{Osc}_{(t=3)} : x - 6y - 27z - 74 = 0.$

Problema 10.3.7 *Să se scrie ecuaţiile binormalelor la curba* $C = \operatorname{Im} c$, *unde*

$$c(t) = \left(\frac{2}{t}, \ln t, -t^2\right), \ t > 0,$$

care sunt paralele cu planul $\pi : x - y + 8z + 5 = 0$.

R. $B_{(t=2)} : \dfrac{x-1}{16} = \dfrac{y - \ln 2}{24} = \dfrac{z+4}{1}.$

Problema 10.3.8 *Fie curba în spaţiu* $C = \operatorname{Im} c$, *unde*

$$c(t) = (t, \sin t, \varphi(t)), \ t \in \mathbb{R}.$$

Să se determine funcţia φ *astfel încât binormalele curbei* C *să fie paralele cu planul* xOz.

R. $\varphi(t) = at + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 10.3.9 *Să se scrie ecuaţiile normalelor principale la curba în spaţiu* $C = \operatorname{Im} c$, *unde*

$$c(t) = \left(\frac{1}{t}, \ln t, t\right), \ t > 0,$$

care sunt paralele cu planul $\pi : 5x + 2y - 5z - 1 = 0$.

R. $N_{(t=1/2)} : \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y + \ln 2}{5} = \dfrac{z - 1/2}{6};$

$N_{(t=1)} : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-1}{3};$

$N_{(t=2)} : \dfrac{x - 1/2}{6} = \dfrac{y - \ln 2}{-5} = \dfrac{z-2}{4}.$

Problema 10.3.10 *Să se găsească ecuaţia planului rectificant la curba în spaţiu* $C = \operatorname{Im} c$, *unde*

$$c(t) = \left(t, t^2, t^3\right), \ t \in \mathbb{R},$$

care este paralel cu planul $\pi : 11x + 8y - 9z + 4 = 0$.

R. $\pi^{rectificant}_{(t=1)} : 11x + 8y - 9z - 10 = 0.$

Problema 10.3.11 *Să se calculeze lungimile următoarelor curbe în spaţiu:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, unde

$$c_1(t) = (t\cos t, t\sin t, t);$$

b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2 : [0,1/4] \to \mathbb{R}^3$, unde

$$c_2(t) = \left(t^2 - t, t^2 + 1, t\right).$$

R. a) $L(C_1) = \ln(1+\sqrt{3}) + \dfrac{\sqrt{3} - \ln 2}{2}$; b) $L(C_2) = \dfrac{(4 + 3\ln 3)\sqrt{2}}{32}$.

Problema 10.3.12 *Să se arate că curbele în spaţiu nu sunt parametrizate canonic şi, în consecinţă, să se reparametrizeze canonic prin lungimea de arc:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, unde $c_1(t) = \left(\cos t, \sin t, \dfrac{t^2}{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$;

b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, unde $c_2(t) = \left(t\cos t, t\sin t, \dfrac{t^2}{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

R. a) $2s = \ln(t + \sqrt{t^2+1}) + t\sqrt{t^2+1}$;

b) $4\sqrt{2} \cdot s = 2\ln\left(t + \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{2}}\right) + 4t\sqrt{t^2 + \dfrac{1}{2}} + \ln 2.$

Problema 10.3.13 *Să se determine curburile şi torsiunile următoarelor curbe în spaţiu:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = \left(t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin\dfrac{t}{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$, *într-un punct arbitrar*;

b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2(s) = \left(\dfrac{4}{5}\cos s, 1 - \sin s, -\dfrac{3}{5}\cos s\right)$, *unde* $s > 0$ *este abscisa curbilinie, într-un punct arbitrar*;

c) $C_3 = \operatorname{Im} c_3$, $c_3(t) = \left(t, t^2, t^4\right)$, *în punctul* $P(t = 1)$;

d) $C_4 = \operatorname{Im} c_4$, $c_4(t) = \left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t\right)$, *în punctul* $P(1, 1, 0)$.

R. a) $K(t) = \dfrac{1}{4}\sqrt{1+\sin^2\dfrac{t}{2}}$; $\tau(t) = \dfrac{(\cos t - 5)\cos(t/2)}{4(3-\cos t)}$.

b) $K(s) = 1$; $\tau(s) = 0$, $\forall\ s > 0$.

c) $K(P) = 2\sqrt{101}/(21\sqrt{21})$; $\tau(P) = 12/101$.

d) $K(P) = \sqrt{2}/4$; $\tau(P) = -\sqrt{2}/4$.

Problema 10.3.14 *Să se determine versorii triedrului lui Frénet, ecuaţiile muchiilor şi feţelor triedrului lui Frénet, curbura şi torsiunea, într-un punct curent sau într-un punct fixat, la curbele:*

a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (t^2, 1-t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, *într-un punct arbitrar*;

b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2(t) = (t\cos t, -t\sin t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, *într-un punct arbitrar*;

c) $C_3 = \operatorname{Im} c_3$, $c_3(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$, *în punctul* $P(t = \pi/4)$;

d) $C_4 : x = 3z^2$, $y = 6z^3$, $z \in \mathbb{R}$, *într-un punct arbitrar*;

e) $C_5 : xyz = 1$, $y^2 = x$, *în punctul* $P(1,1,1)$.

R. a) $T(t) = \dfrac{1}{\sqrt{9t^4+4t^2+1}} \cdot (2t, -1, 3t^2)$ – versorul tangent;

$B(t) = \dfrac{1}{\sqrt{9t^4+9t^2+1}} \cdot (-3t, -3t^2, 1)$ – versorul binormal;

$N(t) = \dfrac{1}{\sqrt{9t^4+9t^2+1}\cdot\sqrt{9t^4+4t^2+1}} \cdot (1-9t^4, 9t^3+2t, 3t+6t^3)$ – versorul normal;

$\dfrac{x-t^2}{2t} = \dfrac{y-1+t}{-1} = \dfrac{z-t^3}{3t^2}$ – tangenta;

$\dfrac{x-t^2}{-3t} = \dfrac{y-1+t}{-3t^2} = \dfrac{z-t^3}{1}$ – binormala;

$\dfrac{x-t^2}{1-9t^4} = \dfrac{y-1+t}{9t^3+2t} = \dfrac{z-t^3}{3t+6t^3}$ – normala principală;

$-3t(x-t^2) - 3t^2(y-1+t) + z - t^3 = 0$ – planul osculator;

$2t(x-t^2) - y + 1 - t + 3t^2(z-t^3) = 0$ – planul normal;

$\left(1-9t^4\right)(x-t^2) + \left(9t^3+2t\right)(y-1+t) + \left(3t+6t^3\right)\left(z-t^3\right) = 0$ – planul rectificant;

$$K(t) = \frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{(9t^4+4t^2+1)\sqrt{9t^4+4t^2+1}} \text{ – curbura;}$$

$$\tau(t) = \frac{3}{9t^4+9t^2+1} \text{ – torsiunea.}$$

b) Se procedează ca la punctul a).

c) $T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, -4\right)$ – versorul tangent în P;

$B\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5}\cdot(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -3)$ – versorul binormal în P;

$N\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ – versorul normal în P;

$\frac{x-\sqrt{2}/4}{-3\sqrt{2}} = \frac{y-\sqrt{2}/4}{3\sqrt{2}} = \frac{z}{-8}$ – tangenta în P;

$\frac{x-\sqrt{2}/4}{2\sqrt{2}} = \frac{y-\sqrt{2}/4}{-2\sqrt{2}} = \frac{z}{-3}$ – binormala în P;

$\frac{x-\sqrt{2}/4}{1} = \frac{y-\sqrt{2}/4}{1} = \frac{z}{0}$ – normala principală în P;

$2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 3z = 0$ – planul osculator în P;

$-3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - 8z = 0$ – planul normal în P;

$2x + 2y - \sqrt{2} = 0$ – planul rectificant în P;

$K\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ – curbura în P; $\tau\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{32}{25}$ – torsiunea în P.

d) O parametrizare a curbei este $C_4 = \operatorname{Im} c_4$, $c_4(t) = (3t^2, 6t^3, t)$, $t \in \mathbb{R}$. În continuare, se procedează ca la punctul a).

e) O parametrizare a curbei este $C_5 = \operatorname{Im} c_5$, $c_5(t) = (t^2, t, t^{-3})$, $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Punctul P este corespunzător valorii $t = 1$. În continuare, se procedează ca la punctul c).

Problema 10.3.15 *Fie curba în spaţiu* $C = \operatorname{Im} c$, *unde*

$$c(t) = (\cos t, \sin t, \varphi(t)), \ t \in \mathbb{R}.$$

a) *Să se determine funcţia* φ *astfel încât curba* C *să fie o curbă plană.*

b) *Cu φ astfel găsit, să se determine curbura şi torsiunea curbei, ştiind că*

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 1,\ \varphi''(0) = -1.$$

R. a) Punând condiţia $\tau(t) = 0$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, găsim ecuaţia diferenţială

$$\varphi'''(t) + \varphi'(t) = 0,$$

care are soluţia generală

$$\varphi(t) = \alpha + \beta \cos t + \gamma \sin t,\ \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

b) Condiţiile impuse aplicaţiei $\varphi(t)$ implică constantele $\alpha = -1$, $\beta = 1$ şi $\gamma = 1$, adică avem

$$\varphi(t) = -1 + \cos t + \sin t,\ \ t \in \mathbb{R}.$$

În acest caz, avem $K(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{(2 - \sin 2t)\sqrt{(2 - \sin 2t)}}$ şi $\tau(t) = 0$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$.

Capitolul 11

Suprafeţe

11.1 Elemente teoretice fundamentale

În spaţiul afin euclidian al vectorilor liberi din spaţiu $\mathcal{E}_3 = (E_3, V_3, \varphi)$, având fixat un reper ortonormat $\mathcal{R} = \{O;\ \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, o *suprafaţă* poate fi definită în două moduri: *implicit* sau *parametric.*

Definiţia 11.1.1 *Se numeşte* ***suprafaţă definită implicit*** *în $\mathcal{E}_3$ o mulţime de puncte din spaţiu $P(x, y, z)$ ale căror coordonate verifică o relaţie de forma $\Sigma : f(x, y, z) = 0$, unde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este o funcţie diferenţiabilă cu proprietatea*

$$(grad\ f)(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P)\right) \neq (0, 0, 0), \quad \forall\ P \in \Sigma.$$

Deoarece vectorul $(grad\ f)(P_0)$ reprezintă direcţia normalei la planul tangent în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ la suprafaţa Σ, rezultă că *ecuaţia planului tangent în P_0 la suprafaţa* Σ se scrie

$$T_{P_0}\Sigma : (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 0,$$

iar *ecuaţia dreptei normale în P_0 la suprafaţa* Σ are expresia

$$N_{P_0}\Sigma : \frac{x - x_0}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)} = \frac{z - z_0}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0)}.$$

Definiţia 11.1.2 *Se numeşte* ***suprafaţă parametrizată simplă*** *în $\mathcal{E}_3$ o aplicaţie diferenţiabilă $r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (D mulţime deschisă în $\mathbb{R}^2$),*

definită prin

$$r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad \forall\ (u,v) \in D,$$

şi având ***proprietatea de regularitate***

$$r_u \times r_v \neq \overline{0}, \quad \forall\ (u,v) \in D,$$

unde

$$r_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \quad r_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Mulţimea de puncte $\Sigma = \operatorname{Im} r = \{P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \mid (u,v) \in D\}$ reprezintă *imaginea geometrică* a suprafeţei parametrizate r. Prin abuz de limbaj, vom numi şi mulţimea Σ tot *suprafaţă parametrizată simplă.*

Deoarece vectorul $(r_u \times r_v)(P)$ reprezintă direcţia normalei la planul tangent în punctul $P = r(u,v)$ la suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$, rezultă că *ecuaţia planului $T_P\Sigma$ tangent în $P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ la Σ* se scrie

$$(x - x(u,v))N_1(u,v) + (y - y(u,v))N_2(u,v) + (z - z(u,v))N_3(u,v) = 0,$$

iar *ecuaţia dreptei $N_P\Sigma$ normale în P la Σ* are expresia

$$\frac{x - x(u,v)}{N_1(u,v)} = \frac{y - y(u,v)}{N_2(u,v)} = \frac{z - z(u,v)}{N_3(u,v)},$$

unde

$$N_1(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad N_2(u,v) = -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$N_3(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Definiţia 11.1.3 *Se numeşte* ***prima formă fundamentală*** *sau* ***metrica*** *suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$ aplicaţia $g : \Sigma \to M_2(\mathbb{R})$ definită prin*

$$g(P) = \begin{pmatrix} E(P) & F(P) \\ F(P) & G(P) \end{pmatrix}, \quad \forall\ P \in \Sigma,$$

unde

$$E(P) = \langle r_u, r_u \rangle (P), \quad F(P) = \langle r_u, r_v \rangle (P), \quad G(P) = \langle r_v, r_v \rangle (P)$$

se numesc ***coeficienţii primei forme fundamentale*** *a suprafeţei* Σ *în punctul* P.

Aria unei suprafeţe parametrizate simple $\Sigma = \operatorname{Im} r$ se calculează după formula

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{\det g}\, du dv = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du dv.$$

Este de remarcat faptul că întotdeauna avem $(\det g)(P) > 0$, $\forall\ P \in \Sigma$. Forma diferenţială $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv$ se numeşte *elementul de arie* al suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$.

Definiţia 11.1.4 *Dacă avem o suprafaţă parametrizată simplă* $\Sigma = \operatorname{Im} r$ *şi o curbă plană*

$$c : I \subset \mathbb{R} \to D \subset \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (u(t), v(t)),$$

atunci curba în spaţiu

$$\widetilde{c} : I \subset \mathbb{R} \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3, \quad \widetilde{c}(t) = r(u(t), v(t)),$$

se numeşte ***curbă pe suprafaţa*** Σ.

În particular, dacă avem un punct $P = r(u_0, v_0)$ fixat arbitrar pe suprafaţa Σ, atunci curbele pe suprafaţa Σ, definite prin $\widetilde{c}_u(t) = r(u_0 + t, v_0)$ şi $\widetilde{c}_v(t) = r(u_0, v_0 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, se numesc *liniile de coordonate* ale suprafeţei Σ, care trec prin punctul P.

Propoziţia 11.1.1 *Lungimea unei curbe* $\widetilde{c}(t) = r(u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$, *pe suprafaţa* Σ *se calculează după formula*

$$\mathcal{L}(\widetilde{c}) = \int_a^b \sqrt{E(\widetilde{c}(t)) \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F(\widetilde{c}(t)) \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(\widetilde{c}(t)) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Fie două curbe $\widetilde{c}_1 : I_1 \subset \mathbb{R} \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ şi $\widetilde{c}_2 : I_2 \subset \mathbb{R} \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ pe suprafaţa Σ, exprimate prin $\widetilde{c}_1(t) = r(u_1(t), v_1(t))$ şi $\widetilde{c}_2(\tau) = r(u_2(\tau), v_2(\tau))$, care se intersectează în punctul $P = r(u_1(t_0), v_1(t_0)) = r(u_2(\tau_0), v_2(\tau_0))$.

Propoziţia 11.1.2 *Unghiul φ format de curbele $\widetilde{c}_1$ şi $\widetilde{c}_2$ în punctul P se calculează după formula*

$$\cos\varphi = \frac{Eu_1'u_2' + F\left(u_1'v_2' + u_2'v_1'\right) + Gv_1'v_2'}{\sqrt{E(u_1')^2 + 2Fu_1'v_1' + G(v_1')^2} \cdot \sqrt{E(u_2')^2 + 2Fu_2'v_2' + G(v_2')^2}},$$

unde coeficienţii E, F şi G ai primei forme fundamentale sunt calculaţi în punctul P, derivatele funcţiilor u_1 şi v_1 sunt evaluate în t_0 şi derivatele funcţiilor u_2 şi v_2 sunt evaluate în τ_0.

Să orientăm suprafaţa parametrizată simplă $\Sigma = \operatorname{Im} r$ cu ajutorul *versorului normal* $N(P)$ într-un punct arbitrar $P = r(u, v)$ al suprafeţei, versor definit de relaţia

$$N(P) = \frac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v] .$$

Cu alte cuvinte, ne-am fixat atenţia asupra unei *feţe* a suprafeţei Σ.

Să considerăm în acelaşi timp vectorii

$$r_{uu} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right), \quad r_{vv} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right),$$

$$r_{uv} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right).$$

Definiţia 11.1.5 *Se numeşte* ***forma a-II-a fundamentală*** *a suprafeţei parametrizate simple $\Sigma = \operatorname{Im} r$ aplicaţia $b : \Sigma \to M_2(\mathbb{R})$ definită prin*

$$b(P) = \begin{pmatrix} l(P) & m(P) \\ m(P) & n(P) \end{pmatrix}, \quad \forall\ P \in \Sigma,$$

unde

$$l(P) = \langle r_{uu}, N\rangle (P), \quad m(P) = \langle r_{uv}, N\rangle (P), \quad n(P) = \langle r_{vv}, N\rangle (P)$$

se numesc ***coeficienţii celei de-a-II-a forme fundamentale*** *a suprafeţei Σ în punctul P.*

Definiţia 11.1.6 *Se numeşte* ***aplicaţia Weingarten*** *a suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$ aplicaţia $L : \Sigma \to M_2(\mathbb{R})$ definită prin*

$$L(P) = (g^{-1} \cdot b)(P) = \left[\frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} lG - mF & mG - nF \\ mE - lF & nE - mF \end{pmatrix}\right](P), \ \forall\ P \in \Sigma.$$

Un vector tangent în punctul $P = r(u, v)$ al suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$, definit prin $v = v_1 \cdot r_u(P) + v_2 \cdot r_v(P)$, unde $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, se numeşte *direcţie principală* dacă perechea (v_1, v_2) este un vector propriu al aplicaţiei Weingarten $L(P)$.

Dacă punctul P are proprietatea că orice vector tangent $v \in T_P\Sigma$ este o direcţie principală, atunci punctul P se numeşte *punct ombilical* al suprafeţei. Evident, un punct $P = r(u, v)$ este ombilical dacă şi numai dacă $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$L(P) = \alpha I_2 \Leftrightarrow \frac{l(P)}{E(P)} = \frac{m(P)}{F(P)} = \frac{n(P)}{G(P)} = \alpha.$$

Observaţia 11.1.3 *Din punct de vedere geometric, în punctele sale ombilicale, o suprafaţă Σ se curbează la fel de tare în toate direcţiile.*

Dacă un punct P al unei suprafeţe Σ nu este ombilical, atunci în acel punct există două şi numai două direcţii principale. O suprafaţă cu toate punctele ombilicale se numeşte *suprafaţă total ombilicală.*

Definiţia 11.1.7 *Funcţia scalară $K : \Sigma \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$K(P) = (\det L)(P) = \frac{\det b}{\det g}(P) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}(P),$$

se numeşte ***curbura Gauss*** *sau* ***curbura totală*** *a suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$.*

Definiţia 11.1.8 *Funcţia scalară $H : \Sigma \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$H(P) = \frac{1}{2}(Trace\ L)(P) = \frac{lG - 2mF + nE}{2(EG - F^2)}(P),$$

se numeşte ***curbura medie*** *a suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$.*

O suprafaţă Σ cu curbura medie identic nulă (i. e. $H(P) = 0,\ \forall\ P \in \Sigma$) se numeşte *suprafaţă minimală.* Este important de remarcat faptul că dintre toate suprafeţele care au aceeaşi frontieră, suprafeţele de arie minimă au proprietatea de a fi suprafeţe minimale. Reciproca nu este valabilă.

Definiţia 11.1.9 *Funcţiile scalare $K_1, K_2 : \Sigma \to \mathbb{R}$ definite prin*

$$K_{1,2}(P) = (H \pm \sqrt{H^2 - K})(P), \quad \forall\ P \in \Sigma,$$

se numesc ***curburile principale*** *ale suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$.*

Curburile principale ale suprafeţei Σ sunt valorile proprii ale aplicaţiei Weingarten. Prin urmare, acestea verifică relaţiile

$$K = K_1 K_2 \quad \text{şi} \quad H = \frac{K_1 + K_2}{2}.$$

Observaţia 11.1.4 *Din punct de vedere geometric, în cazul punctelor neombilicale ale suprafeţei Σ, curburile principale măsoară **gradul de încovoiere** al suprafeţei de-a lungul celor două curbe obţinute prin intersecţia suprafeţei Σ cu cele două plane determinate de normala la suprafaţă şi direcţiile principale.*

În final, să remarcăm că, din punct de vedere geometric, semnul curburii Gauss într-un punct P al suprafeţei Σ, ne oferă informaţii despre forma locală (într-o vecinătate suficient de mică a punctului P) a suprafeţei Σ. Astfel, dacă avem:

a) $K(P) > 0$, atunci, în vecinătatea punctului P, suprafaţa Σ are forma unui paraboloid eliptic (arată ca un "deal" cu vârful în P). Aceste tipuri de puncte se numesc *puncte eliptice*.

b) $K(P) < 0$, atunci, în vecinătatea punctului P, suprafaţa Σ are forma unui paraboloid hiperbolic (arată ca o "şa" centrată în punctul P). Aceste tipuri de puncte se numesc *puncte hiperbolice*.

c) $K(P) = 0$ şi o curbură principală este nenulă, atunci punctul P este situat pe generatoarea unui cilindru parabolic. Aceste tipuri de puncte se numesc *puncte parabolice*.

d) ambele curburi principale nule, atunci nu se poate preciza cu exactitate forma suprafeţei Σ în vecinătatea punctului P. Aceste tipuri de puncte se numesc *puncte planare*.

Fie $\widetilde{c} : I \subset \mathbb{R} \to \Sigma$, $\widetilde{c}(t) = r(u(t), v(t))$, o curbă pe suprafaţa parametrizată $\Sigma = \operatorname{Im} r$, provenită din ridicarea pe suprafaţa Σ a curbei parametrizate plane $c(t) = (u(t), v(t))$ din domeniul D al planului uOv.

Definiţia 11.1.10 *Curba $\widetilde{c}$ se numeşte **linie de curbură** sau **curbă principală** a suprafeţei Σ dacă nu conţine puncte ombilicale şi dacă pentru orice $t \in I$ vectorul tangent $\dot{\widetilde{c}}(t)$ este direcţie principală în punctul $\widetilde{c}(t)$.*

Presupunând că prin eliminarea parametrului t imaginea curbei plane c este descrisă de graficul $\operatorname{Im} c : v = v(u)$, deducem că ecuaţia diferenţială, care determină liniile de curbură ale suprafeţei Σ, este

$$\begin{vmatrix} \left(\dfrac{dv}{du}\right)^2 & -\dfrac{dv}{du} & 1 \\ E & F & G \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

Definiţia 11.1.11 *Curba $\widetilde{c}$ se numeşte* ***linie asimptotică*** *a suprafeţei Σ dacă pentru $\forall\ t \in I$ vectorul acceleraţie $\ddot{\widetilde{c}}(t)$ este perpendicular pe versorul normal $N(\widetilde{c}(t))$ al suprafeţei Σ.*

Presupunând că prin eliminarea parametrului t imaginea curbei plane c este descrisă de graficul $\operatorname{Im} c : v = v(u)$, deducem că ecuaţia diferenţială, care determină liniile asimptotice ale suprafeţei Σ, este

$$n\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2m\frac{dv}{du} + l = 0.$$

Definiţia 11.1.12 *Curba $\widetilde{c}$ se numeşte* ***geodezică*** *a suprafeţei Σ dacă pentru $\forall\ t \in I$ planul osculator la curbă $\pi_0(\widetilde{c}(t))$ conţine versorul normal $N(\widetilde{c}(t))$ al suprafeţei Σ.*

Presupunând că prin eliminarea parametrului t imaginea curbei plane c este descrisă de graficul $\operatorname{Im} c : v = v(u)$, deducem că ecuaţia diferenţială, care determină geodezicele suprafeţei Σ, este (versorul binormal B este perpendicular pe N))

$$\det\left(r_u + r_v\frac{dv}{du}, r_v\frac{d^2v}{du^2} + r_{uu} + 2r_{uv}\frac{dv}{du} + r_{vv}\left(\frac{dv}{du}\right)^2, r_u \times r_v\right) = 0.$$

Este important de remarcat faptul că drumul cel mai scurt dintre două puncte distincte ale suprafeţei Σ este o geodezică. Reciproca nu este valabilă.

11.2 Probleme rezolvate

Problema 11.2.1 *Să se scrie ecuaţiile parametrice ale următorelor suprafeţe definite implicit:*

a) $\Sigma_1 : x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$, *(cilindru circular);*

b) $\Sigma_2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $a, b, c > 0$, *(elipsoid);*

c) $\Sigma_3 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $a, b, c > 0$, *(hiperboloid cu o pânză);*

d) $\Sigma_4 : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2pz$, $a, b, p > 0$, *(paraboloid hiperbolic);*

e) $\Sigma_5 : (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$, $R > r > 0$, *(tor circular);*

f) $\Sigma_6 : z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \ln \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x^2 + y^2 \in (0, 1]$, $z > 0$, *(pseudosferă);*

Rezolvare. a) Deoarece ecuaţia care defineşte cilindrul circular Σ_1 se poate scrie sub forma

$$\Sigma_1 : \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1,$$

putem presupune că $x = R \cos u$ şi $y = R \sin u$, $u \in [0, 2\pi)$. Evident, variabila z fiind arbitrară, putem lua $z = v$, $v \in \mathbb{R}$.

În concluzie, cilindrul circular Σ_1 este reuniunea dintre generatoarea $d : x = R$, $y = 0$ şi suprafaţa parametrizată $\Sigma_1' = \operatorname{Im} r_1$, unde

$$r_1 : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ r_1(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v).$$

b) Putem considera că avem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda^2, \quad \lambda \geq 0.$$

În aceste condiţii, ecuaţia elipsoidului Σ_2 se rescrie ca

$$\Sigma_2 : \lambda^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

adică putem lua $\lambda = \cos u$ şi $z = c \sin u$, $u \in [-\pi/2, \pi/2)$. Rezultă că avem $x = a\lambda \cos v$ şi $y = b\lambda \sin v$, $v \in [0, 2\pi)$.

În concluzie, elipsoidul Σ_2 poate fi considerat ca reuniunea dintre semi-elipsa

$$E : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\ x \geq 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

şi suprafaţa parametrizată $\Sigma_2' = \operatorname{Im} r_2$, unde $r_2 : (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$r_2(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u).$$

c) Procedând ca la punctul b), ecuaţia hiperboloidului cu o pânză Σ_3 se rescrie ca

$$\Sigma_3 : \lambda^2 - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Putem să considerăm parametrizarea $\lambda = \cosh u$ şi $z = c \sinh u$, $u \in \mathbb{R}$. Deducem că $x = a\lambda \cos v$ şi $y = b\lambda \sin v$, $v \in [0, 2\pi)$. Cu alte cuvinte, hiperboloidul cu o pânză Σ_3 este reuniunea dintre hiperbola

$$H : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \ x \geq 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

şi suprafaţa parametrizată $\Sigma_3' = \operatorname{Im} r_3$, unde $r_3 : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$r_3(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u).$$

d) Să considerăm cazul când $z > 0$. În această situaţie, putem considera $2pz = u^2$, $u \in (0, \infty)$, şi deducem că $x = au \cosh v$ şi $y = bu \sinh v$, $v \in \mathbb{R}$. În cazul $z < 0$, luăm $2pz = -u^2$, $u \in (0, \infty)$, şi obţinem că $x = au \sinh v$ şi $y = bu \cosh v$, $v \in \mathbb{R}$. În concluzie, paraboloidul hiperbolic Σ_4 poate fi considerat ca reuniunea dintre generatoarele

$$D_1 : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad D_2 : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

şi suprafeţele parametrizate $\Sigma_4' = \operatorname{Im} r_4'$ şi $\Sigma_4'' = \operatorname{Im} r_4''$, unde

$$r_4' : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad r_4'(u, v) = \left(au \cosh v, bu \sinh v, \frac{u^2}{2p} \right),$$

$$r_4'' : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad r_4'(u, v) = \left(au \sinh v, bu \cosh v, -\frac{u^2}{2p} \right).$$

e) Ecuaţia torului circular Σ_5 se poate rescrie sub forma

$$\Sigma_5 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2.$$

În aceste condiţii, putem realiza parametrizarea $\sqrt{x^2 + y^2} - R = r \cos u$ şi $z = r \sin u$, $u \in [0, 2\pi)$. Rezultă că putem lua $x = (R + r \cos u) \cos v$

şi $y = (R + r\cos u)\sin v$, $v \in [0, 2\pi)$. Prin urmare, torul circular Σ_5 este reuniunea dintre cercurile

$$C_1 : \begin{cases} (x-R)^2 + z^2 = r^2 \\ y = 0, \end{cases}, \quad C_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 = (R+r)^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

şi suprafaţa parametrizată $\Sigma_5' = \operatorname{Im} r_5$, unde $r_5 : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$r_5(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u).$$

f) Deoarece $x^2 + y^2 \in (0, 1]$, putem lua $x^2 + y^2 = \cos^2 u$, $u \in [0, \pi/2)$. Deducem că avem $x = \cos u \cos v$, $y = \cos u \sin v$, $v \in [0, 2\pi)$, şi, prin calcul, găsim

$$z = -\sin u - \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)\right].$$

În concluzie, pseudosfera Σ_6 poate fi privită ca reuniunea dintre imaginea curbei $c : [0, \pi/2) \to \mathbb{R}^3$,

$$c(u) = (\cos u, 0, -\sin u - \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)\right],$$

cercul $C : x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ şi suprafaţa parametrizată $\Sigma_6' = \operatorname{Im} r_6$, unde $r_6 : (0, \pi/2) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$r_6(u, v) = \left(\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u - \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)\right]\right).$$

■

Problema 11.2.2 *Să se determine ecuaţiile carteziene implicite ale suprafeţelor parametrizate:*

a) $\Sigma_1 = \operatorname{Im} r_1$, $r_1(u, v) = (u + v, u - v, uv)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$;

b) $\Sigma_2 = \operatorname{Im} r_2$, $r_2(u, v) = (u + \sin v, u + \cos v, u)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$;

c) $\Sigma_3 = \operatorname{Im} r_3$, $r_3 : (0, 2\pi) \times (-1/2, 1/2) \to \mathbb{R}^3$, unde

$$r_3(u, v) = (\cos u + v\cos u \cos\frac{u}{2}, \sin u + v\sin u \cos\frac{u}{2}, \sin\frac{u}{2}).$$

Rezolvare. a) Deoarece $x = u + v$ şi $y = u - v$, deducem că

$$u = \frac{x+y}{2}, \quad v = \frac{x-y}{2}.$$

Rezultă că suprafaţa Σ_1 este descrisă de ecuaţia carteziană implicită

$$\Sigma_1 : z = \frac{x^2 - y^2}{4} \Leftrightarrow \Sigma_1 : x^2 - y^2 = 4z.$$

Cu alte cuvinte, suprafaţa Σ_1 este un paraboloid hiperbolic.

b) Este evident că $x - z = \sin v$ şi $y - z = \cos v$. Prin urmare, suprafaţa Σ_2 este cilindrul eliptic (prin reducerea la forma canonică a cuadricei)

$$\Sigma_2 : (x - z)^2 + (y - z)^2 = 1.$$

c) Deoarece $z = \sin(u/2)$, rezultă că avem relaţiile $\cos(u/2) = \pm\sqrt{1 - z^2}$, $\cos u = 1 - 2z^2$ şi $\sin u = \pm 2z\sqrt{1 - z^2}$. Aceasta înseamnă că

$$x = (1 - 2z^2)(1 \pm v\sqrt{1 - z^2}), \quad y = \pm 2z\sqrt{1 - z^2}(1 \pm v\sqrt{1 - z^2}).$$

Prin eliminarea parametrului v obţinem ecuaţia carteziană implicită

$$\Sigma_3 : 4x^2 z^2(1 - z^2) = y^2(1 - 2z^2)^2,$$

unde $z \in \mathbb{R}\backslash\{0, \pm 1, \pm\sqrt{2}/2\}$ şi

$$\frac{x}{1 - 2z^2}, \ \pm\frac{y}{2z\sqrt{1 - z^2}} \in \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{1 - z^2}, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 - z^2}\right).$$

Cazurile de excepţie $z \in \{0, \pm 1, \pm\sqrt{2}/2\}$ se tratează separat.

În literatura de specialitate, suprafaţa Σ_3 este cunoscută sub numele de *banda lui Möbius*. ■

Problema 11.2.3 *Să se arate că suprafeţele*

$$\Sigma_1 = \operatorname{Im} r_1, \quad r_1(u, v) = (u + v, uv, u^3 + v^3), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

şi

$$\Sigma_2 = \operatorname{Im} r_2, \quad r_2(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

reprezintă aceeaşi suprafaţă.

Rezolvare. Deoarece în expresia lui r_1 avem $x = u + v$, $y = uv$ şi $z = u^3 + v^3$, deducem că

$$z = (u + v)^3 - 3uv(u + v) = x^3 - 3xy.$$

Prin urmare, suprafaţa Σ_1 este descrisă de ecuaţia carteziană implicită

$$\Sigma_1 : x^3 - 3xy - z = 0.$$

Analog, considerând cazul parametrizării r_2, deducem că suprafaţa Σ_2 este descrisă tot de ecuaţia carteziană implicită

$$\Sigma_2 : x^3 - 3xy - z = 0.$$

În concluzie, am demonstrat că $\Sigma_1 = \Sigma_2$. ■

Problema 11.2.4 *Să se determine planul tangent şi normala la suprafaţă, în următoarele cazuri:*

a) $\Sigma_1 : z = x^3 + y^3$, *în punctul* $P(1, 2, 9)$;

b) $\Sigma_2 : x = ue^v$, $y = ue^{-v}$, $z = 4uv$, *în punctul* $P(u = 2, v = 0)$.

Rezolvare. a) Deoarece avem $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - z$, prin derivări parţiale, deducem că $(grad\ f)(x, y, z) = (3x^2, 3y^2, -1)$. Prin urmare, obţinem $(grad\ f)(P) = (3, 12, -1)$. În concluzie, ecuaţia planului tangent este

$$T_P\Sigma : 3x + 12y - z - 18 = 0,$$

iar ecuaţia dreptei normale are expresia

$$N_P\Sigma : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-9}{-1}.$$

b) Avem $r(u, v) = (ue^v, ue^{-v}, 4uv)$, ceea ce înseamnă că coordonatele carteziene ale punctului P sunt $P(2, 2, 0)$. Prin derivări parţiale, deducem că

$$r_u = (e^v, e^{-v}, 4v), \quad r_v = (ue^v, -ue^{-v}, 4u).$$

Deoarece $r_u(P) = (1, 1, 0)$ şi $r_v(P) = (2, -2, 8)$, găsim că normala în P la suprafaţa Σ_2 este

$$N(P) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 8\bar{i} - 8\bar{j} - 4\bar{k} \equiv (8, -8, -4).$$

În concluzie, ecuaţia planului tangent este

$$T_P\Sigma : 2x - 2y - z = 0,$$

iar ecuaţia dreptei normale are expresia

$$N_P\Sigma : \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1}.$$

■

Problema 11.2.5 *Să se calculeze ariile torului circular* $\Sigma_1 = \operatorname{Im} r_1$ *de raze* $R > r > 0$ *şi a conului circular* $\Sigma_2 : f_2(x, y, z) = 0$, *ale căror suprafeţe sunt definite de*

$$r_1(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u),$$

unde $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, *şi* $f_2(x, y, z) = y^2 + z^2 - x^2$, *unde* $x^2 + y^2 \leq 1$.

Rezolvare. Să calculăm prima formă fundamentală a torului circular Σ_1. Prin derivări parţiale, obţinem

$$\begin{aligned} r_{1u} &= (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u), \\ r_{2u} &= (-(R + r\cos u)\sin v, (R + r\cos u)\cos v, 0). \end{aligned}$$

Prin urmare, coeficienţii primei forme fundamentale sunt $E = r^2$, $F = 0$ şi $G = (R + r\cos u)^2$. Determinantul primei forme fundamentale

$$g = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)^2 \end{pmatrix}$$

este $\det g = [r(R + r\cos u)]^2$. În concluzie, aria torului circular Σ_1 se calculează după formula

$$\mathcal{A}(\Sigma_1) = \iint_{(0,2\pi)\times(0,2\pi)} r(R+r\cos u)dudv = r\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}(R + r\cos u)dv\right)du$$

$$= 2\pi r\int_0^{2\pi}(R + r\cos u)du = 2\pi r(Ru + r\sin u)|_0^{2\pi} = 4\pi^2 Rr.$$

Pentru a calcula aria conului circular Σ_2, vom parametriza întâi suprafaţa. Luând $x = u$, $u \in \mathbb{R}$, deducem că $y = u\cos v$ şi $z = u\sin v$, $v \in [0, 2\pi]$. În concluzie, avem suprafaţa parametrizată

$$r(u, v) = (u, u\cos v, u\sin v),$$

a cărei primă formă fundamentală este

$$g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Deoarece, din relaţia $x^2 + y^2 \leq 1$, găsim că $u \in [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$. Rezultă că aria conului circular Σ_2 se calculează după formula

$$\mathcal{A}(\Sigma_2) = 2\iint_{(0,\sqrt{2}/2)\times(0,2\pi)} \sqrt{2}ududv = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\int_0^{2\pi} udv\right)du$$

$$= 4\pi\sqrt{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} udu = 2\pi\sqrt{2}\cdot u^2\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \pi\sqrt{2}.$$

■

Problema 11.2.6 *Se dă suprafaţa parametrizată*

$$\Sigma : x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = u + v, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

a) *Să se calculeze lungimea arcului de curbă obţinut prin ridicarea pe suprafaţa Σ a segmentului de pe prima bisectoare $C : u = v$ cuprins între punctele $P(u = 1, v = 1)$ şi $Q(u = 2, v = 2)$.*

b) *Să se calculeze unghiul dintre liniile de coordonate ale suprafeţei Σ.*

c) *Să se determine curbele de pe suprafaţa Σ care sunt perpendiculare pe ridicatele curbelor plane $C : v = v_0$, unde $v_0 \in \mathbb{R}$, fixat.*

Rezolvare. a) Coeficienţii primei forme fundamentale a suprafeţei Σ sunt $E = 2$, $F = 1$ şi $G = 1 + u^2$. Evident, avem $C = \operatorname{Im} c$, unde $c : [1, 2] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t, t)$. Rezultă că avem $u(t) = v(t) = t$ şi $du/dt = dv/dt = 1$. Ridicata curbei C pe suprafaţa Σ este curba

$$\widetilde{c}(t) = r(t, t) = (t\cos t, t\sin t, 2t),\ \ t \in [1, 2].$$

Calculând coeficienţii primei forme fundamentale în lungul curbei $\widetilde{c}(t)$, deducem că lungimea curbei $\widetilde{c}$ este dată de formula

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\widetilde{c}) &= \int_1^2 \sqrt{E + 2F + G}dt = \int_1^2 \sqrt{t^2 + 5}dt = \\ &= \frac{5}{2}\left[\ln 5 - \ln(1 + \sqrt{6})\right] + 3 - \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

b) Fie $M(u = u_0, v = v_0)$ un punct pe suprafaţa Σ. Liniile de coordonate ale suprafeţei Σ prin punctul M sunt ridicatele curbelor $c_1, c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c_1(t) = (u_0 + t, v_0)$ şi $c_2(t) = (u_0, v_0 + t)$. Deoarece avem $u_1(t) = u_0 + t$, $v_1(t) = v_0$, $u_2(t) = u_0$ şi $v_2(t) = v_0 + t$, prin derivare, obţinem $u_1'(t) = v_2'(t) = 1$ şi $u_2'(t) = v_1'(t) = 0$. În concluzie, unghiul φ dintre curbele de coordonate este dat de formula

$$\cos\varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}(M) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + u_0^2)}}.$$

c) Fără a restrânge generalitatea, putem căuta curbele necunoscute ca fiind ridicatele unor curbe de forma $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, unde $c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c_1(t) = (t, v(t))$. Deoarece avem $C = \operatorname{Im} c_2$, unde $c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c_2(t) = (t, v_0)$, rezultă că $u_1(t) = t, v_1(t) = v(t)$, $u_2(t) = t$ şi $v_2(t) = v_0$. Prin derivare, obţinem $u_1'(t) = u_2'(t) = 1$, $v_1'(t) = v'(t)$ şi $v_2'(t) = 0$. Să presupunem că curbele C_1 şi C se intersectează în punctul $M(u = u_0, v = v_0)$, unde $u_0 \in \mathbb{R}$, arbitrar. Prin urmare, condiţia de ortogonalitate a ridicatelor curbelor C_1 şi C se reduce la

$$\begin{cases} E + Fv'(u_0) = 0 \\ v(u_0) = v_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + v'(u_0) = 0 \\ v(u_0) = v_0. \end{cases}$$

Folosind formula de dezvoltare în serie Taylor a funcţiei v, în vecinătatea punctului u_0, deducem că

$$v(t) = -2t + 2u_0 + v_0 + \mathcal{O}((t - u_0)^2).$$

În concluzie, curbele ortogonale în punctul $M(u = u_0, v = v_0)$ pe ridicata curbei $C : v = v_0$ sunt ridicatele curbelor $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, unde

$$c_1(t) = (t, -2t + 2u_0 + v_0 + \mathcal{O}((t - u_0)^2)),$$

$u_0 \in \mathbb{R}$ fiind ales arbitrar. ∎

Problema 11.2.7 *Se ştie că prima formă fundamentală a unei suprafeţe Σ este*

$$g = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

a) *Să se determine unghiul format de curbele obţinute prin ridicarea pe suprafaţa Σ a curbelor plane $C_1 : v = u + 1$ şi $C_2 : v + u = 3$.*

b) *Să se găsească traiectoriile ortogonale curbei obţinute prin ridicarea pe suprafaţa Σ a curbei plane $C : uv = k$, $k \in \mathbb{R}^*$.*

Rezolvare. a) Evident, avem $C_1 = \operatorname{Im} c_1$ şi $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, unde $c_1, c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c_1(t) = (t, t + 1)$, $c_2(t) = (t, 3 - t)$. Deoarece avem $u_1(t) = t$, $v_1(t) = t - 1$, $u_2(t) = t$ şi $v_2(t) = 3 - t$, prin derivare, obţinem $u_1'(t) = u_2'(t) = v_1'(t) = 1$ şi $v_2'(t) = -1$. Punctul de intersecţie al curbelor C_1 şi C_2 este $P(u = 1, v = 2)$, corespunzător lui $t = 1$. În concluzie, unghiul φ dintre curbele obţinute prin ridicarea pe suprafaţa Σ a curbelor C_1 şi C_2 este dat de formula

$$\cos\varphi = \frac{E - G}{\sqrt{E + 2F + G} \cdot \sqrt{E - 2F + G}}(P) = \frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2}(P) = \frac{3}{5}.$$

b) Fără a restrânge generalitatea, putem căuta curbele necunoscute ca fiind ridicatele graficelor de forma $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, unde $c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c_1(t) = (t, v(t))$. Deoarece avem $C = \operatorname{Im} c_2$, unde $c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c_2(t) = (t, k/t)$, rezultă că $u_1(t) = t, v_1(t) = v(t)$, $u_2(t) = t$ şi $v_2(t) = k/t$. Prin derivare, obţinem $u_1'(t) = u_2'(t) = 1$, $v_1'(t) = v'(t)$ şi $v_2'(t) = -k/t^2$. Să presupunem că punctul $P(u = u_0, v = v_0)$, unde $v(u_0) = v_0 = k/u_0$, este punctul de intersecţie al curbelor C_1 şi C, obţinut pentru $t = u_0$. Condiţia de ortogonalitate a ridicatelor curbelor C_1 şi C se reduce la

$$\begin{cases} E - Gv'(u_0)\dfrac{k}{u_0^2} = 0 \\ v(u_0) = v_0 = \dfrac{k}{u_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0^2 - kv'(u_0) = 0 \\ v(u_0) = v_0 = \dfrac{k}{u_0}. \end{cases}$$

Folosind formula de dezvoltare în serie Taylor a funcţiei v, în vecinătatea punctului $u_0 = k/v_0$, deducem că

$$v(t) = \frac{v_0^2}{k}t + \mathcal{O}\left(\left(t - \frac{k}{v_0}\right)^2\right).$$

În concluzie, curbele ortogonale în punctul $P(u = u_0, v = v_0)$, unde $v(u_0) = v_0 = k/u_0$, pe ridicata curbei $C : uv = k$ sunt ridicatele curbelor $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, unde

$$c_1(t) = \left(t, \frac{v_0^2}{k}t + \mathcal{O}\left(\left(t - \frac{k}{v_0}\right)^2\right)\right),$$

$v_0 = k/u_0 \in \mathbb{R}^*$ fiind ales arbitrar. ■

Problema 11.2.8 *Să se demonstreze că sfera* $\Sigma = \operatorname{Im} r$ *de rază* $R > 0$, *unde*

$$r : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (R\cos u \cos v, R\sin u \cos v, R\sin v),$$

este o suprafaţă total ombilicală de curbură constantă.

Rezolvare. Prin derivări parţiale, găsim

$$r_u = (-R\sin u \cos v, R\cos u \cos v, 0),$$
$$r_v = (-R\cos u \sin v, -R\sin u \sin v, R\cos v).$$

Prin urmare, prima formă fundamentală a sferei este

$$g = \begin{pmatrix} R^2\cos^2 v & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}.$$

Derivând parţial în continuare, obţinem

$$\begin{aligned} r_{uu} &= (-R\cos u\cos v, -R\sin u\cos v, 0),\\ r_{uv} &= (R\sin u\sin v, -R\cos u\sin v, 0),\\ r_{vv} &= (-R\cos u\cos v, -R\sin u\cos v, -R\sin v). \end{aligned}$$

Ţinând cont că versorul normal la sferă este

$$N(u,v) = (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v),$$

deducem că forma a-II-a fundamentală a sferei are expresia

$$b = \begin{pmatrix} -R\cos^2 v & 0 \\ 0 & -R \end{pmatrix} = -\frac{1}{R}g.$$

În concluzie, toate punctele sferei sunt ombilicale. Evident, aplicaţia lui Weingarten, în cazul sferei, are forma $L = g^{-1}b = -(1/R)I_2$. Rezultă că curbura Gauss a sferei este constantă: $K = \det L = 1/R^2$. ■

Problema 11.2.9 *Să se arate că suprafaţa* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde*

$$r : \mathbb{R}^2 - \{(u,v) |\ u \neq v\} \to \mathbb{R}^3, \quad r(u,v) = (u+v, uv, u^3+v^3),$$

conţine numai puncte hiperbolice.

Rezolvare. În urma calculelor, găsim că prima formă fundamentală a suprafeţei Σ este

$$g = \begin{pmatrix} 1+v^2+9u^4 & 1+uv+9u^2v^2 \\ 1+uv+9u^2v^2 & 1+u^2+9v^4 \end{pmatrix}.$$

A doua formă fundamentală a suprafeţei Σ are expresia

$$b = \pm\frac{3}{\sqrt{1+9(u+v)^2+9(u^2+uv+v^2)^2}}\begin{pmatrix} 2u & u+v \\ u+v & 2v \end{pmatrix},$$

unde semnul " + " apare când $u > v$, iar semnul " − " apare când $u < v$. În concluzie, curbura Gauss a suprafeţei Σ are valoarea

$$K = \frac{\det b}{\det g} = \frac{-9}{[1+9(u+v)^2+9(u^2+uv+v^2)^2]^2}.$$

Deoarece $K(P) < 0$, $\forall\ P \in \Sigma$, deducem că suprafaţa Σ conţine numai puncte hiperbolice. ■

Problema 11.2.10 *Să se demonstreze că pe suprafaţa* $\Sigma : z = x^3 - 3xy^2$, *punctul* $O(0,0,0)$ *este un punct planar. (**Punctul de întâlnire a trei văi separate de trei dealuri este un punct planar**.)*

Rezolvare. Luând $x = u$ şi $y = v$, este evident că avem $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad r(u,v) = (u, v, u^3 - 3uv^2).$$

Prin urmare, în urma calculelor, găsim că prima formă fundamentală a suprafeţei Σ este

$$g = \begin{pmatrix} 1 + 9(u^2 - v^2)^2 & -18uv(u^2 - v^2) \\ -18uv(u^2 - v^2) & 1 + 36u^2v^2 \end{pmatrix},$$

iar forma a-II-a fundamentală are expresia

$$b = \frac{6}{\sqrt{1 + 36u^2v^2 + 9(u^2 - v^2)^2}} \begin{pmatrix} u & -v \\ -v & -u \end{pmatrix}.$$

Deducem atunci că curbura Gauss a suprafeţei Σ are valoarea

$$K = \frac{-36(u^2 + v^2)}{[1 + 36u^2v^2 + 9(u^2 - v^2)^2]^2},$$

iar curbura medie a suprafeţei Σ este

$$H = \frac{27\left[4u^3v^3 - 4uv^2(u^2 - v^2) - u(u^2 - v^2)^2\right]}{[1 + 36u^2v^2 + 9(u^2 - v^2)^2]^{3/2}}$$

În concluzie, calculând curburile Gauss şi medie în punctul $O(0,0,0)$, corespunzător parametrilor $u = 0$ şi $v = 0$, găsim $K(O) = H(O) = 0$, ceea ce implică $K_1(O) = K_2(O) = 0$. Cu alte cuvinte, punctul O este un punct planar al suprafeţei Σ. Să notăm că acesta este singurul punct planar al suprafeţei Σ. ∎

Problema 11.2.11 *Să se precizeze care sunt punctele ombilicale ale **suprafeţei Ţiţeica*** $\Sigma : xyz = 1$ *şi să se calculeze curburile principale ale acesteia chiar în aceste puncte.*

Rezolvare. Parametrizăm suprafaţa Ţiţeica $\Sigma : xyz = 1$ cu ajutorul aplicaţiei $r : \mathbb{R}^2 - \{(u,v) \mid uv = 0\} \to \mathbb{R}^3$, unde

$$r(u,v) = \left(u, v, \frac{1}{uv}\right).$$

Prin calcul, deducem ca formele fundamentale ale suprafeţei Ţiţeica $\Sigma = \operatorname{Im} r$ au expresiile

$$g = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{1}{u^4v^2} & \dfrac{1}{u^3v^3} \\ \\ \dfrac{1}{u^3v^3} & 1 + \dfrac{1}{u^2v^4} \end{pmatrix}$$

şi

$$b = \frac{1}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{2v}{u} & 1 \\ \\ 1 & \dfrac{2u}{v} \end{pmatrix}.$$

Condiţia ca un punct $P = r(u,v) \in \Sigma$ să fie ombilical este ca

$$\frac{l(P)}{E(P)} = \frac{m(P)}{F(P)} = \frac{n(P)}{G(P)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{2v}{u}}{1 + \dfrac{1}{u^4v^2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{u^3v^3}} = \frac{\dfrac{2u}{v}}{1 + \dfrac{1}{u^2v^4}}.$$

Cu alte cuvinte, în urma calculelor, trebuie să avem $u^2v^4 = u^4v^2 = 1$, adică avem patru puncte ombilicale pe suprafaţa Ţiţeica: $P(u = -1, v = -1)$, $Q(u = -1, v = 1)$, $R(u = 1, v = -1)$ şi $S(u = 1, v = 1)$. Este evident că

$$g(P) = g(S) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(P) = b(S) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$g(Q) = g(R) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(Q) = b(R) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aplicaţiile Weingarten în aceste puncte sunt $L(P) = L(S) = (1/\sqrt{3})I_2$ şi $L(Q) = L(R) = -(1/\sqrt{3})I_2$. Prin urmare, curburile principale în aceste puncte sunt valorile proprii ale aplicaţiilor Weigarten, adică avem

$$K_1(P) = K_2(P) = K_1(S) = K_2(S) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$K_1(Q) = K_2(Q) = K_1(R) = K_2(R) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

■

Problema 11.2.12 *Să se arate că* ***elicoidul drept*** $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde*

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v),$$

este o suprafaţă minimală şi să se calculeze curburile ei principale.

Rezolvare. Cu ajutorul derivărilor parţiale, deducem că formele fundamentale ale elicoidului drept sunt

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + u^2 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad b = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

iar aplicaţia lui Weingarten devine

$$L = g^{-1} b = \frac{1}{\sqrt{(1+u^2)^3}} \begin{pmatrix} 0 & -(1+u^2) \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este evident acum că elicoidul drept este o suprafaţă minimală, deoarece valoarea curburii medii în fiecare punct al elicoidului este

$$H = \frac{1}{2} \cdot Trace\ L = 0.$$

Curbura Gauss a elicoidului drept are valoarea

$$K = \det L = -\frac{1}{(1+u^2)^2} < 0,$$

ceea ce înseamnă că elicoidul drept conţine numai puncte hiperbolice. În concluzie, curburile principale ale acestuia se exprimă prin

$$K_{1,2} = \pm\sqrt{-K} = \pm\frac{1}{1+u^2}.$$

■

Problema 11.2.13 *Să se găsescă suprafeţele de rotaţie* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde*

$$r : \mathbb{R}^2 - \{(0, v) \mid v \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3,$$

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u)), \quad f \in C^2(\mathbb{R}^*),$$

care sunt minimale.

Rezolvare. Formele fundamentale ale suprafeţei de rotaţie Σ sunt

$$g = \begin{pmatrix} 1+f'^2(u) & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad b = \pm\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(u)}}\begin{pmatrix} f''(u) & 0 \\ 0 & uf'(u) \end{pmatrix},$$

unde $f'(u)$ (respectiv $f''(u)$) reprezintă derivata de ordinul întâi (respectiv al doilea) a funcţiei necunoscute f, iar semnele " $\pm$ " apar după cazurile $u > 0$ şi $u < 0$. Expresia aplicaţiei lui Weingarten

$$L = g^{-1}b = \pm\frac{1}{u(1+f'^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} uf'' & 0 \\ 0 & f'(1+f'^2) \end{pmatrix}$$

conduce la curbura medie

$$H = \frac{1}{2}\cdot Trace\ L = \pm\frac{1}{2}\cdot\frac{uf''+f'(1+f'^2)}{u(1+f'^2)^{3/2}}.$$

În concluzie, suprafaţa Σ este minimală dacă şi numai dacă

$$uf''+f'(1+f'^2)=0.$$

Notând acum $f'(u)=g(u)$, deducem ca ecuaţia diferenţială anterioară se rescrie

$$u\frac{dg}{du} = -g(1+g^2) \Leftrightarrow -\frac{1}{g(1+g^2)}dg = \frac{1}{u}du.$$

Prin integrare, în urma calculelor, găsim

$$\frac{g^2+1}{g^2} = u^2C^2 \Leftrightarrow g = \pm\frac{1}{C\sqrt{u^2-\dfrac{1}{C^2}}}, \quad C>0.$$

În final, din nou prin integrare, obţinem

$$f(u) = \pm\frac{1}{C}\cdot\ln\left|u+\sqrt{u^2-\frac{1}{C^2}}\right| + \ln C_1, \quad C, C_1 > 0.$$

■

Problema 11.2.14 *Să se arate că* ***pseudosfera*** $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde*

$$r : \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,$$

$$r(u,v) = \left(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u - \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right]\right),$$

este un spaţiu cu curbură constantă negativă. Să se determine liniile de curbură şi liniile asimptotice ale pseudosferei Σ.

Rezolvare. În urma calculelor, deducem ca pseudosfera Σ este caracterizată de următorii coeficienţi ai primei forme fundamentale: $E = \tan^2 u$, $F = 0$ şi $G = \cos^2 u$. Coeficienţii celei de a-II-a forme fundamentale a pseudosferei sunt $l = \tan u$, $m = 0$ şi $n = -\sin u \cos u$. În concluzie, curbura Gauss a pseudosferei Σ are valoarea

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = -1.$$

Liniile de curbură ale pseudosferei se găsesc rezolvând ecuaţia diferenţială

$$\begin{vmatrix} \left(\dfrac{dv}{du}\right)^2 & -\dfrac{dv}{du} & 1 \\ \tan^2 u & 0 & \cos^2 u \\ \tan u & 0 & -\sin u \cos u \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{du} = 0 \Leftrightarrow v = v_0 \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare, liniile de curbură ale pseudosferei Σ coincid cu liniile de coordonate

$$\widetilde{c}_u(t) = r(t, v_0), \ t \in (0, \pi/2)\,, \ v_0 \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţia diferenţială a liniilor asimptotice este

$$-\sin u \cos u \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \tan u = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{du} = \mp \frac{1}{\cos u} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(u) = \mp \ln \left[C \cdot \frac{1 + \tan \dfrac{u}{2}}{1 - \tan \dfrac{u}{2}} \right], \quad C > 0.$$

Rezultă că liniile asimptotice ale pseudosferei sunt

$$\widetilde{c}(t) = r\left(t, \mp \ln \left[C \cdot \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right), \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \ C > 0.$$

■

Problema 11.2.15 *Se consideră suprafaţa cilindrică* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde*

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (f(u), g(u), v), \quad f, g \in C^2(\mathbb{R}).$$

Să se arate că geodezicele cilindrului Σ *sunt elice cilindrice.*

Rezolvare. Prin derivări parţiale succesive, găsim

$$\begin{aligned} r_u &= (f', g', 0), & r_v &= (0, 0, 1), \\ r_{uu} &= (f'', g'', 0), & r_{uv} &= r_{vv} = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Rezultă că, în urma calculelor, obţinem $r_u \times r_v = (g', -f', 0)$ şi

$$r_u + r_v \frac{dv}{du} = \left(f', g', \frac{dv}{du}\right),$$

$$r_v \frac{d^2v}{du^2} + r_{uu} + 2r_{uv}\frac{dv}{du} + r_{vv}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \left(f'', g'', \frac{d^2v}{du^2}\right).$$

În aceste condiţii, ecuaţia diferenţială a geodezicelor cilindrului Σ este

$$\begin{vmatrix} f' & g' & \dfrac{dv}{du} \\ f'' & g'' & \dfrac{d^2v}{du^2} \\ g' & -f' & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{du}(f'f'' + g'g'') - \frac{d^2v}{du^2}(f'^2 + g'^2) = 0.$$

Rezolvând ecuaţia anterioară, deducem că

$$\left[\ln \frac{dv}{du}\right]' = \frac{1}{2}\left[\ln(f'^2 + g'^2)\right]' \Leftrightarrow \frac{dv}{du} = C\sqrt{f'^2 + g'^2}, \quad C > 0.$$

În final, prin integrare, găsim că

$$v(u) = C\int_{u_0}^{u} \sqrt{f'^2(\tau) + g'^2(\tau)}d\tau, \quad C > 0,\ u_0 \in \mathbb{R}.$$

Cu alte cuvinte, geodezicele cilindrului Σ sunt curbele

$$\widetilde{c}(t) = r(t, v(t)) = (f(t), g(t), v(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Efectuând eventual o reparametrizare, putem presupune ca geodezicele cilindrului Σ sunt parametrizate prin lungimea de arc. Cu alte cuvinte, putem presupune fără a restrânge generalitatea că

$$f'^2(\tau) + g'^2(\tau) = \frac{1}{C^2 + 1},\ \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

În aceste condiţii, geodezicele cilindrului Σ sunt date de curbele

$$\widetilde{c}(s) = \left(f(s), g(s), \frac{C}{\sqrt{C^2+1}}(s - u_0)\right)$$

ale căror vectori viteză sunt $\dot{\bar{c}}(s) = (f'(s), g'(s), C/\sqrt{C^2+1})$. În concluzie, unghiul θ dintre vectorul viteză $\dot{\bar{c}}(s)$ şi axa fixă Oz este constant:

$$\theta = \arccos \left\langle \dot{\bar{c}}(s), (0,0,1) \right\rangle = \arccos \frac{C}{\sqrt{C^2+1}}.$$

Cu alte cuvinte, rezultă că geodezicele cilindrului Σ sunt elice cilindrice. ■

11.3 Probleme propuse

Problema 11.3.1 *Să se scrie ecuaţiile parametrice ale următoarelor suprafeţe definite implicit:*

a) $\Sigma_1 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$, *unde* $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $R > 0$, *(sferă)*;

b) $\Sigma_2 : \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} - \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} + 1 = 0$, *unde* $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $a, b, c > 0$, *(hiperboloid cu două pânze)*;

c) $\Sigma_3 : \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 2pz$, *unde* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $a, b, p > 0$, *(paraboloid eliptic)*.

R. a) $\Sigma_1 = \operatorname{Im} r_1$, unde $r_1 : [0, 2\pi) \times [0, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$r_1(u, v) = (x_0 + R\cos u \sin v, y_0 + R \sin u \sin v, z_0 + R \cos v);$$

b) $\Sigma_2 = \operatorname{Im} r_2^1 \cup \operatorname{Im} r_2^2$, unde $r_2^{1,2} : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$r_2^{1,2}(u, v) = (x_0 + a \sinh u \cos v, y_0 + b \sinh u \sin v, z_0 \pm c \cosh v);$$

c) $\Sigma_3 = \operatorname{Im} r_3$, unde $r_3 : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$r_3(u, v) = \left(x_0 + au\cos v, y_0 + bu \sin v, \frac{u^2}{2p} \right).$$

Problema 11.3.2 *Să se determine ecuaţiile carteziene implicite ale suprafeţelor parametrizate:*

a) $\Sigma_1 = \operatorname{Im} r_1$, $\quad r_1(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, *(elicoidul drept)*;

b) $\Sigma_2 = \operatorname{Im} r_2$, *unde* $r_2 : [1, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$r_2(u, v) = \left(u \cos v, u \sin v, \ln \left(u + \sqrt{u^2 - 1} \right) \right), \text{ (catenoidul);}$$

c) $\Sigma_3 = \operatorname{Im} r_3$, *unde* $r_3 : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$r_3(u, v) = (u + \cos v, u - \sin v, -u)\,, \textit{ (cilindru eliptic).}$$

R. a) $\Sigma_1 : x^2 \sin^2 z - y^2 \cos^2 z = 0$;

b) $\Sigma_2 : z = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\right),\ x^2 + y^2 \geq 1$;

c) $\Sigma_3 : (x + z)^2 + (y + z)^2 = 1$.

Problema 11.3.3 *Se dă suprafaţa* $\Sigma : x^3 + y^3 + z^3 = R^3$, $R > 0$, *şi punctul* $M(a, b, c)$ *pe* Σ, *unde* $a, b, c > 0$.

a) *Să se scrie ecuaţia planului tangent şi a dreptei normale în* M *la* Σ;

b) *Să se găsească locul geometric descris de punctul* M *când planul tangent trece prin punctul fix* $N(1, 1, 1)$;

c) *Dacă* A, B *şi* C *sunt punctele în care planul tangent în* M *la* Σ *intersectează axele* Ox, Oy *şi* Oz, *să se demonstreze egalitatea*

$$\frac{a}{||OA||} + \frac{b}{||OB||} + \frac{c}{||OC||} = 1.$$

R. a) $T_M\Sigma : a^2x + b^2y + c^2z - R^3 = 0$, $N_M\Sigma : \dfrac{x - a}{a^2} = \dfrac{y - b}{b^2} = \dfrac{z - c}{c^2}$;

b) Locul geometric este curba situată la intersecţia surafeţei Σ cu sfera centrată în originea $O(0, 0, 0)$ şi de rază $R\sqrt{R} > 0$, de ecuaţie

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^3.$$

c) Avem $A(R^3/a^2, 0, 0)$, $B(0, R^3/b^2, 0)$ şi $C(0, 0, R^3/c^2)$. Relaţia cerută este acum imediată.

Problema 11.3.4 *Fie suprafaţa parametrizată* $\Sigma : x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = R \sin 2v$, $R \in \mathbb{R}^*$, *şi fie punctul* $M(u = a, v = b)$ *pe* Σ, *unde* $a, b \in \mathbb{R}$.

a) *Să se scrie ecuaţiile planului tangent şi dreptei normale în* M *la* Σ;

b) *Să se găsească ecuaţiile curbei de intersecţie dintre suprafaţa* Σ *şi planul tangent în punctul* M;

c) *Să se studieze natura acestei curbe pentru* $b = 0$ şi $a \neq 0$. *În ce caz este ea un cerc?*

R. a) $T_M\Sigma : [2R\sin b\cos 2b]\cdot x - [2R\cos b\cos 2b]\cdot y + a\cdot z - aR\sin 2b = 0$,
$N_M\Sigma : \dfrac{x - a\cos b}{2R\sin b\cos 2b} = \dfrac{y - a\sin b}{-2R\cos b\cos 2b} = \dfrac{z - R\sin 2b}{a}$;

b) Ecuaţia implicită a suprafeţei este $\Sigma : z = \dfrac{2Rxy}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$. Rezultă că ecuaţiile implicite ale curbei căutate sunt

$$C_{a,b} : \begin{cases} [2R\sin b\cos 2b]\cdot x - [2R\cos b\cos 2b]\cdot y + a\cdot z - aR\sin 2b = 0 \\ z = \dfrac{2Rxy}{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0). \end{cases}$$

c) Luând $b = 0$ şi $a \neq 0$, curba de intersecţie are ecuaţiile

$$C_{a,0} : \begin{cases} -2Ry + az = 0 \\ z = \dfrac{2Rxy}{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0), \end{cases}$$

care reprezintă reuniunea dintre axa $Ox\backslash\{O(0,0,0)\}$ şi curba plană

$$\mathcal{C} : \begin{cases} z = \dfrac{2R}{a}\cdot y \\ \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4}. \end{cases}$$

O parametrizare a curbei plane $\mathcal{C}$ este dată de

$$c(t) = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, \frac{a}{2}\sin t, R\sin t\right).$$

Deoarece curbura curbei $\mathcal{C}$ este

$$K(t) = \frac{a^2(a^2+4R^2)}{2(a^2+4R^2\cos^2 t)^{3/2}},$$

adică este neconstantă, rezultă că curba $\mathcal{C}$ nu este niciodată un cerc.

Problema 11.3.5 *Să se calculeze elementul de arie pentru* ***banda lui Möbius*** $\Sigma_1 = \operatorname{Im} r_1$, *unde*

$$r_1 : [0,2\pi]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}^3,$$

$$r_1(u,v) = \left(\cos u + v\cos u\cos\frac{u}{2}, \sin u + v\sin u\cos\frac{u}{2}, \sin\frac{u}{2}\right),$$

precum şi pentru suprafaţa

$$\Sigma_2 : (x^2+y^2-4)^2 + (z-4)^2 = 1.$$

R. a) Elementul de arie al benzii lui Möbius este

$$d\sigma_1 = \left|\cos\frac{u}{2}\right| \cdot \sqrt{1 + 2v\cos\frac{u}{2} + \left(v^2 + \frac{1}{4}\right)\cos^2\frac{u}{2}} dudv;$$

b) O parametrizare a suprafeţei Σ_2 este

$$r_2 : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,$$

unde

$$r_2(u, v) = \left(\sqrt{4 + \cos u} \cdot \cos v, \sqrt{4 + \cos u} \cdot \sin v, 4 + \sin u\right).$$

Prin urmare, în urma calculelor, găsim elementul de arie

$$d\sigma_2 = \frac{\sqrt{1 + 15\cos^2 u + 4\cos^3 u}}{2} dudv.$$

Problema 11.3.6 *Se consideră suprafaţa* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde* $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$r(u, v) = \left(\frac{u^2}{2} + v, \frac{v^2}{2} + u, uv\right).$$

Să se arate că:

a) *Binormalele ridicatelor curbelor* $C : v = v_0$, $v_0 \in \mathbb{R}$, *sunt paralele cu un plan fix din spaţiu;*

b) *Fiecare curbă* $C : v = v_0$ *are raza de curbură minimă în punctul său de intersecţie cu linia de coordonate obţinută prin ridicarea pe suprafaţa* Σ *a curbei plane* $Ov : u = 0$;

c) *Ridicata curbei plane* $C' : u = v$ *este o curbă plană pe suprafaţa* Σ.

R. a) Ridicatele curbelor $C : v = v_0$, $v_0 \in \mathbb{R}$, sunt curbele

$$\widetilde{c}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + v_0, \frac{v_0^2}{2} + t, tv_0\right),$$

care au binormalele constante

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + v_0^2}} \cdot (0, v_0, -1).$$

b) Raza de curbură a curbei plane $\widetilde{c}(t)$ este

$$R(t) = \frac{\left(t^2 + 1 + v_0^2\right)^{3/2}}{\sqrt{1 + v_0^2}},$$

care are un minim în punctul $P(t = 0) \equiv P(u = 0, v = v_0) \equiv P(v_0, v_0^2/2, 0)$.

c) Ridicata curbei $C' : u = v$ este curba

$$\widetilde{c}'(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t, \frac{t^2}{2} + t, t^2\right),$$

care are imaginea inclusă în planul $\pi : x - y = 0$.

Problema 11.3.7 *Să se arate că suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$, $r : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^3$,*

$$r(u, v) = \left(u + \frac{1}{v}, u - \frac{1}{v}, \frac{2u}{v}\right),$$

este dublu riglată şi să se determine liniile ei de coordonate.

R. Suprafaţa Σ este paraboloidul hiperbolic (suprafaţă dublu riglată) $\Sigma : x^2 - y^2 = 2z$. Liniile de coordonate prin punctul $P(u = u_0, v = v_0)$, unde $(u_0, v_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, sunt curbele

$$\widetilde{c}_1(t) = \left(u_0 + t + \frac{1}{v_0}, u_0 + t - \frac{1}{v_0}, \frac{2(u_0 + t)}{v_0}\right)$$

şi

$$\widetilde{c}_2(t) = \left(u_0 + \frac{1}{v_0 + t}, u_0 - \frac{1}{v_0 + t}, \frac{2u_0}{v_0 + t}\right).$$

Problema 11.3.8 *Să se demonstreze că liniile de coordonate ale sferei şi ale torului circular sunt curbe ortogonale pe suprafaţă.*

R. Unghiul dintre liniile de coordonate este determinat de formula

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Deoarece pentru ambele suprafeţe (sfera şi torul circular) avem $F \equiv 0$, rezultă ceea ce aveam de demonstrat.

Problema 11.3.9 *Pe elicoidul drept* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde*

$$r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

se consideră triunghiul curbiliniu $\triangle ABC$ *determinat de ridicatele pe suprafaţă a curbelor plane*

$$C_1 : u = 0, \quad C_2 : v = 0, \quad C_3 : u + v = 1.$$

Să se calculeze perimetrul, unghiurile şi aria triunghiului curbiliniu $\triangle ABC$*.*

R. Dacă luăm $A(u = 0, v = 0)$, $B(u = 1, v = 0)$, $C(u = 0, v = 1)$, atunci avem:

$$\widehat{A} = \frac{\pi}{2},\ \widehat{B} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3},\ \widehat{C} = \frac{3\pi}{4};$$

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{3\ln(1+\sqrt{2}) + 2 - \sqrt{2}}{6};$$

$$P_{\triangle ABC} = l(\overset{\frown}{AB}) + l(\overset{\frown}{AC}) + l(\overset{\frown}{BC}) = \frac{2\ln(1+\sqrt{3}) + 4 - \ln 2 + \sqrt{3}}{2}.$$

Problema 11.3.10 *Să se calculeze perimetrul şi unghiurile paralelogramului curbiliniu* $ABCD$ *determinat prin ridicarea pe suprafaţa* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde*

$$r(u,v) = (u^2 - v^2, u^2, u^2v^3), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

a curbelor plane

$$C_1 : u = 0, \quad C_2 : u = 1, \quad C_3 : v = 0, \quad C_4 : v = 2.$$

R. Dacă luăm $A(u = 0, v = 0)$, $B(u = 1, v = 0)$, $C(u = 1, v = 2)$, $D(u = 0, v = 2)$, atunci avem:

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{D} = \frac{\pi}{2},\ \widehat{C} = \arccos\frac{23}{\sqrt{660}};$$

$$P_{ABCD} = l(\overset{\frown}{AB}) + l(\overset{\frown}{BC}) + l(\overset{\frown}{CD}) + l(\overset{\frown}{AD}) = \\ = \frac{100 + 27\sqrt{2} + 80\sqrt{10} + 27\sqrt{66}}{27}.$$

Problema 11.3.11 *Să se determine curbele de pe catenoidul* $\Sigma = \operatorname{Im} r$ *definit prin* $r : (1,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$r_2(u,v) = \left(u\cos v, u\sin v, \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right)\right),$$

care intersectează ridicatele curbelor $C : v = v_0$ *sub un unghi constant*

$$\theta = \theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

R. Curbele căutate sunt ridicatele curbelor plane $\mathcal{C} : v = v(u)$, unde

$$v(u) = v_0 \pm \frac{\tan\theta_0}{\sqrt{u_0^2 - 1}} (u - u_0) + \mathcal{O}\left((u - u_0)^2\right), \ u_0 > 1 \text{ arbitrar.}$$

Problema 11.3.12 *Să se calculeze formele fundamentale ale suprafeţei Monge* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde*

$$r(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

ştiind că $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

R. Avem $g = \begin{pmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + f_v^2 \end{pmatrix}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}$, unde f_u, f_v, f_{uu}, f_{uv} şi f_{vv} sunt derivatele de ordinul întâi (respectiv al doilea) ale funcţiei f.

Problema 11.3.13 *Să se găsească punctele ombilicale ale elipsoidului*

$$\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \ a > b > c > 0.$$

R. Dacă considerăm parametrizarea $x = a \cos u \sin v$, $y = b \sin u \sin v$, $z = c \cos v$, $(u, v) \in [0, 2\pi) \times (0, \pi)$, găsim patru puncte ombilicale:

$$P_{1,2,3,4}\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, 0, \pm c\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}}\right),$$

Problema 11.3.14 *Să se demonstreze că o suprafaţă* Σ *este un plan dacă şi numai dacă a doua formă fundamentală a suprafeţei este nulă.*

R. " $\Longrightarrow$ " Daca planul $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ este imaginea parametrizării

$$r(u, v) = \left(u, v, \frac{-D - Au - Bv}{C}\right),$$

unde $C \neq 0$ şi $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, atunci, prin calcul, deducem că $l = m = n = 0$.

" $\Longleftarrow$ " Să presupunem acum că $l = m = n = 0$ pentru orice punct al unei suprafeţei Σ. Atunci avem

$$l = \langle r_{uu}, N \rangle = -\left\langle r_u, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle = 0,$$

unde $N = \dfrac{r_u \times r_v}{||r_u \times r_v||}$ este versorul normal la suprafaţă. Deducem că avem $\dfrac{\partial N}{\partial u} \perp r_u$. Analog, avem

$$m = \langle r_{uv}, N \rangle = -\left\langle r_u, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle = -\left\langle r_v, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle = 0,$$

adică $\dfrac{\partial N}{\partial v} \perp r_u$ şi $\dfrac{\partial N}{\partial u} \perp r_v$. Din relaţia

$$n = \langle r_{vv}, N \rangle = -\left\langle r_v, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle = 0$$

obţinem că $\dfrac{\partial N}{\partial v} \perp r_v$. Dacă ţinem cont acum că avem şi egalităţile (prin derivarea relaţiei $\langle N, N \rangle = 1$)

$$\left\langle N, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle = \left\langle N, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial N}{\partial u} \perp N \text{ şi } \frac{\partial N}{\partial v} \perp N,$$

conchidem că

$$\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{\partial N}{\partial v} = 0.$$

Cu alte cuvinte, versorul normal N este un vector constant (nu depinde de punctul de pe suprafaţă).

Fie acum $P_0 = r(u_0, v_0)$ un punct fixat pe suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$ şi fie $P = r(u, v)$ un punct arbitrar al suprafeţei. Să notăm $p = \langle P - P_0, N \rangle$. Evident, prin derivarea funcţiei p, găsim

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \langle r_u, N \rangle = 0 \text{ şi } \frac{\partial p}{\partial v} = \langle r_v, N \rangle = 0,$$

adică $p = C$ - constant. Luând $P = P_0$, găsim $C = 0$, adică $\langle P - P_0, N \rangle = 0$ pentru orice punct al suprafeţei Σ. Aceasta nu este altceva decât ecuaţia vectorială a unui plan de normală N.

Problema 11.3.15 *Să se demonstreze că o suprafaţă Σ este total ombilicală dacă şi numai dacă este o sferă.*

R. Am demonstrat la Probleme Rezolvate că sfera este o suprafaţă total ombilicală. Reciproc, să presupunem că toate punctele unei suprafeţe Σ sunt ombilicale, adică avem

$$\frac{E}{l} = \frac{F}{m} = \frac{G}{n} = \alpha \neq 0$$

pentru orice punct al suprafeţei. Vom arăta pentru început că $\alpha = a$ - constant. Cum avem

$$l = -\left\langle r_u, \frac{\partial N}{\partial u}\right\rangle,\ m = -\left\langle r_u, \frac{\partial N}{\partial v}\right\rangle = -\left\langle r_v, \frac{\partial N}{\partial u}\right\rangle,\ n = -\left\langle r_v, \frac{\partial N}{\partial v}\right\rangle,$$

rezultă că

$$\left\langle r_u + \alpha \cdot \frac{\partial N}{\partial u}, r_u\right\rangle = 0 \text{ şi } \left\langle r_u + \alpha \cdot \frac{\partial N}{\partial u}, r_v\right\rangle = 0,$$

adică

$$r_u + \alpha \cdot \frac{\partial N}{\partial u} = 0$$

(altfel $r_u + \alpha \cdot \partial N/\partial u$ ar fi coliniar cu normala, ceea ce este absurd deoarece el se află în planul tangent). Analog, obţinem

$$r_v + \alpha \cdot \frac{\partial N}{\partial v} = 0.$$

Derivând acum funcţia $r_u + \alpha \cdot \partial N/\partial u$ în raport cu v şi funcţia $r_v + \alpha \cdot \partial N/\partial v$ în raport cu u, deducem egalitatea

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} \cdot \frac{\partial N}{\partial v} = \frac{\partial \alpha}{\partial v} \cdot \frac{\partial N}{\partial u}$$

sau

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} \cdot r_v = \frac{\partial \alpha}{\partial v} \cdot r_u.$$

Dacă $\partial\alpha/\partial u$ şi $\partial\alpha/\partial v$ ar fi nenuli, atunci r_u şi r_v ar fi coliniari, ceea ce implică $N = 0$ (absurd!). În concluzie, avem $\partial\alpha/\partial u = \partial\alpha/\partial v = 0$, adică $\alpha = a$ - constant.

Integrând acum relaţiile $r_u + a \cdot \partial N/\partial u = 0$ şi $r_v + a \cdot \partial N/\partial v$, găsim $r = r_0 - a \cdot N$, unde r_0 este o constantă de integrare şi $||N(u, v)|| = 1$. Aceasta este ecuaţia parametrică a sferei de rază $R = |a|$ şi centru $P_0 = r_0$.

Problema 11.3.16 *Să se demonstreze că o suprafaţă Σ este un cilindru circular dacă şi numai dacă coeficienţii celor două forme fundamentale ale suprafeţei sunt constanţi.*

R. " $\Longrightarrow$ " Considerând cilindrul circular $r(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, prin calcul, obţinem $E = 1$, $F = 0$ şi $G = 1$, respectiv $l = -1$, $m = 0$ şi $n = 0$.

" $\Longleftarrow$ " Reciproc, să presupunem că o suprafaţă Σ are coeficienţii formelor fundamentale constanţi. Atunci, avem relaţiile (deduse prin derivări)

$$r_{uu} = l \cdot N,\ r_{uv} = m \cdot N,\ r_{vv} = n \cdot N,$$

care implică (prin reducere la absurd) $r_{uv} = 0$.

Deoarece forma a-II-a fundamentală nu este identic nulă, presupunem că $l \neq 0$. Atunci, tot prin reducere la absurd, deducem că $r_{vv} = 0$.

Prin urmare, ţinând cont şi de faptul că $\langle r_u, r_u \rangle = E$ - constant, deducem că aplicaţia r are o expresie de forma

$$r(u,v) = (x_0+av+\sqrt{E}\cos\theta\sin u, y_0+bv-\sqrt{E}\cos\theta\cos u, z_0+cv+\sqrt{E}\sin\theta),$$

unde $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ şi $\theta \in [0,2\pi]\backslash\{\pi/2, 3\pi/2\}$ sunt constante.

Punând condiţia ca vectorii r_{uu} şi N să fie coliniari, nenuli, găsim valorile $a = b = 0$ şi $c = l$, adică avem

$$r(u,v) = (x_0 + \sqrt{E}\cos\theta\sin u, y_0 - \sqrt{E}\cos\theta\cos u, z_0 + lv + \sqrt{E}\sin\theta).$$

Aceasta este ecuaţia parametrică a cilindrului circular

$$\Sigma : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = E\cos^2\theta, \ z \in \mathbb{R}.$$

Problema 11.3.17 *Să se calculeze curburile principale ale suprafeţelor implicite* $\Sigma_1 : z = e^{x+y} - 1$, $\Sigma_2 : z = \ln(\cos x) - \ln(\cos y)$ *şi* $\Sigma_3 : z = (x+3y)^3$.

R. a) $K_1^{\Sigma_1} = 0$, $K_2^{\Sigma_1} = \dfrac{2e^{u+v}}{\left[1+2e^{2(u+v)}\right]^{3/2}}$;

b) $K_{1,2}^{\Sigma_2} = \pm\dfrac{\sqrt{(1+\tan^2 u)(1+\tan^2 v)}}{1+\tan^2 u + \tan^2 v}$;

c) $K_1^{\Sigma_3} = 0$, $K_2^{\Sigma_3} = \dfrac{60(u+3v)}{[1+90(u+3v)^4]^{3/2}}$.

Problema 11.3.18 *Fie suprafaţa Ţiţeica* $\Sigma : xyz = 1$. *Să se demonstreze că există un punct fix* P_0 *din spaţiu, care are proprietatea*

$$\frac{K(P)}{[d(P_0, T_P\Sigma)]^4} = const, \quad \forall\ P \in \Sigma,$$

unde K *este curbura Gauss a suprafeţei Ţiţeica.*

R. Luăm punctul P_0 exact originea $O(0,0,0)$ a sistemului de axe. Atunci avem

$$\frac{K(P)}{[d(O, T_P\Sigma)]^4} = \frac{1}{27}, \quad \forall\ P \in \Sigma.$$

Problema 11.3.19 *Să se găsească punctele planare ale suprafeţei* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde* $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$r(u,v) = (\cos u + \cos v, \sin u + \sin v, u - v).$$

R. Punctele planare (i. e., $H(P) = K(P) = 0$) ale suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$ sunt punctele de pe ridicatele curbelor plane $C_k : u - v = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Problema 11.3.20 *Să găsească punctele planare ale suprafeţei*

$$\Sigma : x + y = z^3.$$

R. Punctele planare ale suprafeţei Σ sunt punctele de pe dreapta (a doua bisectoare) $d : x + y = 0$, $z = 0$.

Problema 11.3.21 *Să se studieze natura punctelor suprafeţei* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde* $r : \mathbb{R}\backslash\{1\} \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$r(u,v) = ((1-u)\cos v, (1-u)\sin v, u).$$

R. Toate punctele suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$ sunt parabolice.

Problema 11.3.22 *Să se demonstreze că* ***suprafaţa lui Enneper*** $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde* $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$r(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2 v, u^2 - v^2\right)$$

este o suprafaţă minimală.

R. Prin calcul direct, se arată că $lG - 2mF + nE = 0$, ceea ce înseamnă că $H \equiv 0$. Cu alte cuvinte, suprafaţa lui Enneper este o suprafaţă minimală.

Problema 11.3.23 *Să se calculeze curbura medie a suprafeţei* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde* $r : [(0, 2\pi)\backslash\{\pi\}] \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$r(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, 2\cos u).$$

Este Σ *o suprafaţă minimală?*

R. Suprafaţa Σ nu este minimală. Curbura medie este

$$H(u,v) = \begin{cases} -\dfrac{2 + 3\sin^2 u}{(1 + 3\sin^2 u)^{3/2}}, & u \in (0, \pi) \\ \dfrac{2 + 3\sin^2 u}{(1 + 3\sin^2 u)^{3/2}}, & u \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Problema 11.3.24 *Să se determine funcţia $F \in C^2(\mathbb{R})$ astfel încât suprafaţa conoidă*

$$\Sigma : z = F\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0,$$

să fie minimală.

R. $F(t) = C_1 + C \cdot \arctan t$, unde $C_1 \in \mathbb{R}$, $C > 0$.

Problema 11.3.25 *Să se găsească liniile asimptotice ale suprafeţei parametrizate $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde $r : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,*

$$r(u, v) = (u, uv, v + \ln u).$$

R. Liniile asimptotice sunt ridicatele curbelor plane

$$\mathcal{C}_C : v = \frac{C}{\sqrt{u}},\ C > 0,\ u > 0.$$

Problema 11.3.26 *Să se găsească liniile asimptotice şi liniile de curbură ale suprafeţei de rotaţie $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde $r : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,*

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \ln u).$$

R. Liniile asimptotice sunt ridicatele curbelor plane

$$\mathcal{C}_C : v = \pm \ln(C \cdot u),\ C > 0,$$

unde $u > 0$ şi $v \in (0, 2\pi)$. Liniile de curbură sunt ridicatele curbelor plane

$$\mathcal{C}_{v_0} : v = v_0,\ v_0 \in (0, 2\pi).$$

Problema 11.3.27 *Se consideră suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,*

$$r(u, v) = (3u + 3uv^2 - u^3, 3v + 3u^2v - v^3, 3(u^2 - v^2)).$$

Să se determine liniile asimptotice şi liniile de curbură ale suprafeţei Σ. Să se arate că liniile de curbură sunt curbe plane.

R. Liniile asimptotice sunt ridicatele curbelor plane

$$\mathcal{C}_C : v = \pm u + C,\ C \in \mathbb{R},$$

adică sunt curbele în spaţiu $\widetilde{c}^C_{1,2}(u) = (x^C_{1,2}(u), y^C_{1,2}(u), z^C_{1,2}(u))$, unde

$$x^C_{1,2}(u) = 3u + 3u(C \pm u)^2 - (C \pm u)^3,$$
$$y^C_{1,2}(u) = 3(C \pm u) + 3u^2(C \pm u) - (C \pm u)^3,$$
$$z^C_{1,2}(u) = 3\left[u^2 - (C \pm u)^2\right].$$

Liniile de curbură sunt ridicatele curbelor plane

$$\mathcal{C}_{v_0} : v = v_0, \ v_0 \in \mathbb{R},$$

adică sunt curbele în spaţiu

$$\widetilde{c}_{v_0}(u) = (3u + 3uv_0^2 - u^3, 3v_0 + 3u^2 v_0 - v_0^3, 3(u^2 - v_0^2)).$$

În continuare, se arată că pentru aceste curbe în spaţiu $\tau = 0$, adică curbele $\widetilde{c}_{v_0}$ sunt curbe plane.

Problema 11.3.28 *Să se demonstreze că drumul cel mai scurt dintre două puncte distincte situate în plan este segmentul de dreaptă care le uneşte.*

R. Considerând planul parametrizat $r(u, v) = (u, v, au + bv + c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, deducem că ecuaţia diferenţială a geodezicelor planului este

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{dv}{du} & a + b\dfrac{dv}{du} \\ 0 & \dfrac{d^2v}{du^2} & b\dfrac{d^2v}{du^2} \\ -a & -b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 + a^2 + b^2) \cdot \frac{d^2v}{du^2} = 0.$$

Integrând, găsim că geodezicele planului sunt ridicatele curbelor plane $C_{\alpha,\beta} : v = \alpha u + \beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, adică sunt curbele în spaţiu

$$\widetilde{c}_{\alpha,\beta}(u) = (u, \alpha u + \beta, (a + \alpha b)\, u + b\beta + c).$$

Aceste curbe (geodezice) sunt exact dreptele de ecuaţii

$$d_{\alpha,\beta} : \begin{cases} y = \alpha x + \beta \\ z = (a + \alpha b)\, x + b\beta + c. \end{cases}$$

Problema 11.3.29 *Să se arate că geodezicele sferei sunt exact cercurile sale ecuatoriale.*

R. Dacă considerăm sfera parametrizată $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (R\cos u \cos v, R\sin u \cos v, R\sin v),$$

deducem, printr-un calcul laborios, că ecuaţia diferenţială a geodezicelor sferei este

$$\cos v \cdot \frac{d^2 v}{du^2} + 2\sin v \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \sin v \cos^2 v = 0.$$

Prin urmare, geodezicele sferei sunt curbele în spaţiu, de forma

$$\widetilde{c}(u) = (R\cos u \cos v(u), R\sin u \cos v(u), R\sin v(u)),$$

unde funcţia $v(u)$ este soluţie a ecuaţiei de mai sus a geodezicelor.

În continuare, se arată că aceste geodezice (ca şi curbe în spaţiu) au curbura constantă $K = 1/R > 0$ şi torsiunea constant nulă $\tau = 0$. Cu alte cuvinte, ele sunt cercuri ecuatoriale.

Bibliografie

[1] **Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache:** *Algebră liniară. Geometrie analitică şi diferenţială. Ecuaţii diferenţiale* (*Culegere de probleme)*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2003.

[2] **Gh. Atanasiu, E. Stoica:** *Algebră liniară. Geometrie analitică*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2003.

[3] **Gh. Atanasiu, M. Târnoveanu, M. Purcaru, A. Manea:** *Algebră liniară şi geometrie analitică (Culegere de probleme)*, Universitatea "Transilvania" din Braşov, 2002.

[4] **V. Bălan:** *Algebră Liniară. Geometrie Analitică,* Editura Fair Partners, Bucureşti 1999.

[5] **M. Craioveanu, I. Albu:** *Geometrie afină şi euclidiană*, Editura Facla, Timişoara, 1982.

[6] **V. Cruceanu:** *Elemente de algebră liniară şi geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.

[7] **S. Ianuş:** *Curs de geometrie diferenţială*, Universitatea Bucureşti, 1981.

[8] **A. Kurosh:** *Higher Algebra*, Mir Publishers, Moscow, 1975.

[9] **N. Mihăileanu:** *Geometrie analitică, proiectivă şi diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

[10] **R. Miron:** *Introducere în geometria diferenţială*, Universitatea "Al. I. Cuza" din Iaşi, 1971.

[11] **R. Miron:** *Geometrie analitică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

[12] **M. Neagu, A. Oană:** *Geometrie superioară în plan şi în spaţiu*, Editura Universităţii Transilvania din Braşov, 2008.

[13] **L. Nicolescu:** *Curs de geometrie*, Universitatea Bucureşti, 1990.

[14] **L. Nicolescu:** *Geometrie diferenţială (Culegere de probleme)*, Universitatea Bucureşti, 1982.

[15] **V. Obădeanu:** *Elemente de algebră liniară şi geometrie analitică*, Editura Facla, Timişoara, 1981.

[16] **V. Oproiu:** *Geometrie*, Universitatea "Al. I. Cuza" din Iaşi, 1980.

[17] **Gh. Pitiş:** *Curs de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Universitatea "Transilvania" din Braşov, 1990.

[18] **C. Radu:** *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura All, Bucureşti, 1996.

[19] **C. Radu, L. Drăguşin, C. Drăguşin:** *Algebră liniară. Analiză matematică. Geometrie analitică şi diferenţială (Culegere de probleme)*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2000.

[20] **N. Soare:** *Curs de geometrie*, Universitatea Bucureşti, 1996.

[21] **K. Teleman:** *Geometrie diferenţială locală şi globală*, Editura Tehnică, 1974.

[22] **A. Turtoi:** *Geometrie*, Universitatea Bucureşti, 1985.

[23] **C. Udrişte:** *Algebră liniară. Geometrie analitică*, Editura Geometry Balkan Press, Bucureşti, 2000.

[24] **C. Udrişte:** *Geometrie diferenţială. Ecuaţii diferenţiale*, Editura Geometry Balkan Press, Bucureşti, 1997.

[25] **C. Udrişte, V. Balan:** *Analytic and differential geometry*, Editura Geometry Balkan Press, Bucureşti, 1999, (English).

[26] **C. Udrişte, I. Boca:** *Linear Algebra*, Geometry Balkan Press, Bucharest 1999, (English).

[27] **Gh. Vrânceanu:** *Geometrie analitică, proiectivă şi diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.

[28] **Gh. Vrânceanu, G. Mărgulescu:** *Geometrie analitică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.